RQC Russian Quantum Center

Линейные квантовые измерения и детекторы гравитационных волн

Ф.Халили

2 марта 2023 г.

Miass, Russia February 26 – March 4, 2023

6th International School on Quantum Technologies

Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t)) \cos \omega_o t + \hat{a}_s(t) \sin \omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar \omega_o} = \hat{\dot{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t)) \cos \omega_o t + \hat{a}_s(t) \sin \omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar \omega_o} = \dot{\hat{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

$$\text{"}A \gg a_{c,s}\text{"} \text{ (оптомеханика!)} \Rightarrow$$

$$\dot{N} := \langle \dot{\hat{N}} \rangle = \frac{A^2}{2}; \quad \delta\dot{\hat{N}}(t) = A\hat{a}_c(t)$$

Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t)) \cos \omega_o t + \hat{a}_s(t) \sin \omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar\omega_o} = \hat{\dot{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

"$A \gg a_{c,s}$" (оптомеханика!) $\Rightarrow$

$$\dot{N} := \langle \hat{\dot{N}} \rangle = \frac{A^2}{2}; \quad \delta\hat{\dot{N}}(t) = A\hat{a}_c(t)$$

Спектральные плотности

Когерентное состояние: $S_{cc} = S_{ss} = \frac{1}{2}$

Сжатое когерентное состояние ($\theta = 0$):

$$S_{cc} = \frac{e^{2r}}{2}; \quad S_{ss} = \frac{e^{-2r}}{2}$$

Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t))\cos\omega_o t + \hat{a}_s(t)\sin\omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar\omega_o} = \hat{\dot{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

"$A \gg a_{c,s}$" (оптомеханика!) $\Rightarrow$

$$\dot{N} := \langle\hat{\dot{N}}\rangle = \frac{A^2}{2}; \quad \delta\hat{\dot{N}}(t) = A\hat{a}_c(t)$$

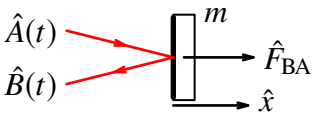
Спектральные плотности

Когерентное состояние: $S_{cc} = S_{ss} = \frac{1}{2}$

Сжатое когерентное состояние $(\theta = 0)$:

$$S_{cc} = \frac{e^{2r}}{2}; \quad S_{ss} = \frac{e^{-2r}}{2}$$

Простейшая оптомеханическая система



Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t))\cos\omega_o t + \hat{a}_s(t)\sin\omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar\omega_o} = \hat{\dot{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

"$A \gg a_{c,s}$" (оптомеханика!) $\Rightarrow$

$$\dot{N} := \langle\hat{\dot{N}}\rangle = \frac{A^2}{2}; \quad \delta\hat{\dot{N}}(t) = A\hat{a}_c(t)$$

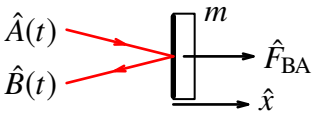
Спектральные плотности

Когерентное состояние: $S_{cc} = S_{ss} = \frac{1}{2}$

Сжатое когерентное состояние $(\theta = 0)$:

$$S_{cc} = \frac{e^{2r}}{2}; \quad S_{ss} = \frac{e^{-2r}}{2}$$

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{B}(t) \approx (A + \hat{a}_c(t))\cos(\omega_o t - 2k_o\hat{x}(t)) + \hat{b}_s(t)\sin(\omega_o t - 2k_o\hat{x}(t))$$

$$\approx (A + \hat{a}_c(t))\cos\omega_o t + \hat{b}_s(t)\sin\omega_o t$$

$$\hat{b}_s(t) = \hat{a}_s(t) + 2k_o A\hat{x}(t) \quad (k_o = \omega_o/c)$$

Наикратчайшее теоретическое введение

Квантование бегущей волны

$$\hat{A}(t) = (A + \hat{a}_c(t))\cos\omega_o t + \hat{a}_s(t)\sin\omega_o t$$

$$\overline{\hat{A}^2(t)}^t = \frac{\hat{I}}{\hbar\omega_o} = \hat{\dot{N}}$$

$$[\hat{a}_c(t)), \hat{a}_s(t')] = i\delta(t - t')$$

"$A \gg a_{c,s}$" (оптомеханика!) $\Rightarrow$

$$\dot{N} := \langle\hat{\dot{N}}\rangle = \frac{A^2}{2}; \quad \delta\hat{\dot{N}}(t) = A\hat{a}_c(t)$$

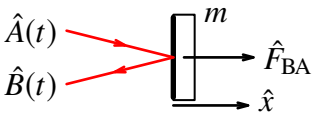
Спектральные плотности

Когерентное состояние: $S_{cc} = S_{ss} = \frac{1}{2}$

Сжатое когерентное состояние $(\theta = 0)$:

$$S_{cc} = \frac{e^{2r}}{2}; \quad S_{ss} = \frac{e^{-2r}}{2}$$

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{B}(t) \approx (A + \hat{a}_c(t))\cos(\omega_o t - 2k_o\hat{x}(t)) + \hat{b}_s(t)\sin(\omega_o t - 2k_o\hat{x}(t))$$

$$\approx (A + \hat{a}_c(t))\cos\omega_o t + \hat{b}_s(t)\sin\omega_o t$$

$$\hat{b}_s(t) = \hat{a}_s(t) + 2k_o A\hat{x}(t) \quad (k_o = \omega_o/c)$$

Back action: $\hat{F}_{\mathrm{BA}}(t) \approx 2\hbar k_o A\hat{a}_c(t)$

Обнаружение очень слабой классической силы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{signal}} - \kappa \hat{x}_{\text{probe}} \hat{x}_{\text{signal}}$$

Обнаружение очень слабой классической силы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{signal}} - \kappa \hat{x}_{\text{probe}}\, \hat{x}_{\text{signal}}$$

$$\kappa \to 0\,, \quad \hat{x}_{\text{signal}} \to \infty \;\Rightarrow\; \kappa^2 [\hat{x}_{\text{signal}}(t), \hat{x}_{\text{signal}}(t')] \to 0$$

Обнаружение очень слабой классической силы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{signal}} - \kappa \hat{x}_{\text{probe}}\, \hat{x}_{\text{signal}}$$

$$\kappa \to 0\,, \quad \hat{x}_{\text{signal}} \to \infty \;\Rightarrow\; \kappa^2 [\hat{x}_{\text{signal}}(t), \hat{x}_{\text{signal}}(t')] \to 0$$

$$\kappa \hat{x}_{\text{signal}} \to F_{\text{signal}}(t) \text{ (c-number)} \;\Rightarrow\; \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} - \hat{x}_{\text{probe}} F_{\text{signal}}(t)$$

Обнаружение очень слабой классической силы

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} + \hat{\mathcal{H}}_{\text{signal}} - \kappa \hat{x}_{\text{probe}}\, \hat{x}_{\text{signal}}$$

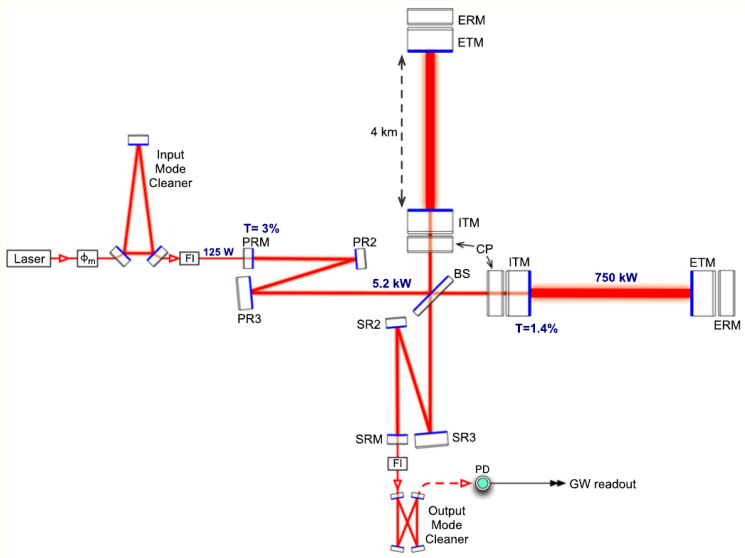
$$\kappa \to 0\,, \quad \hat{x}_{\text{signal}} \to \infty \;\Rightarrow\; \kappa^2 [\hat{x}_{\text{signal}}(t), \hat{x}_{\text{signal}}(t')] \to 0$$

$$\kappa \hat{x}_{\text{signal}} \to F_{\text{signal}}(t) \text{ (c-number)} \;\Rightarrow\; \hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{probe}} - \hat{x}_{\text{probe}} F_{\text{signal}}(t)$$

“Квантовые сенсоры”...

Пример: ГВ детекторы

Пример: ГВ детекторы

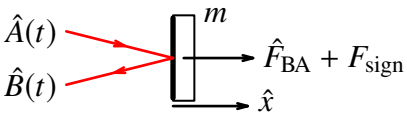


$$F_{N,W} = \pm \frac{mL}{2} \frac{d^2 h(t)}{dt^2}$$

J.Aasi *et al*, Class. Quantum Grav. **32**, 074001 (2015)

Обнаружение слабой классической силы

Простейшая оптомеханическая система

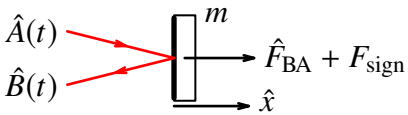


$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\hat{x}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) = 2\hbar k_o A\hat{a}_c(\Omega)$$

Обнаружение слабой классической силы

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\hat{x}(\Omega)$$

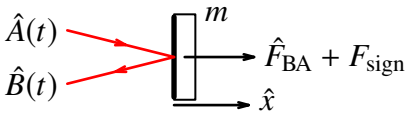
$$\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) = 2\hbar k_o A\hat{a}_c(\Omega)$$

Уравнение движения для зеркала:

$$\hat{x}(\Omega) = \chi(\Omega)[\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) + F_{\mathrm{sign}}(\Omega)]$$

Обнаружение слабой классической силы

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\hat{x}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) = 2\hbar k_o A\hat{a}_c(\Omega)$$

Уравнение движения для зеркала:

$$\hat{x}(\Omega) = \chi(\Omega)[\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) + F_{\mathrm{sign}}(\Omega)]$$

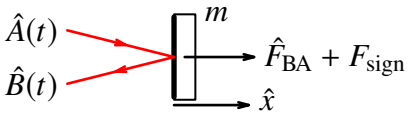
Оценка силы:

$$\tilde{F}_{\mathrm{sign}}(\Omega) = \frac{\hat{b}_s(\Omega)}{2k_o A\chi(\Omega)} = F_{\mathrm{sign}}(\Omega) + \hat{F}_{\mathrm{sum}}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\mathrm{sum}}(\Omega) = \chi^{-1}\hat{x}_{\mathrm{meas}}(\Omega) + \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega);\ \hat{x}_{\mathrm{meas}}(\Omega) = \frac{\hat{a}_s(\Omega)}{2k_o A}$$

Обнаружение слабой классической силы

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\hat{x}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) = 2\hbar k_o A\hat{a}_c(\Omega)$$

Уравнение движения для зеркала:

$$\hat{x}(\Omega) = \chi(\Omega)[\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) + F_{\mathrm{sign}}(\Omega)]$$

Оценка силы:

$$\tilde{F}_{\mathrm{sign}}(\Omega) = \frac{\hat{b}_s(\Omega)}{2k_o A\chi(\Omega)} = F_{\mathrm{sign}}(\Omega) + \hat{F}_{\mathrm{sum}}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\mathrm{sum}}(\Omega) = \chi^{-1}\hat{x}_{\mathrm{meas}}(\Omega) + \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega);\ \hat{x}_{\mathrm{meas}}(\Omega) = \frac{\hat{a}_s(\Omega)}{2k_o A}$$

Стандартный Квантовый Предел

$$S[\hat{x}_{\mathrm{meas}}] := S_{xx} = \frac{e^{-2r}}{16k_o^2\dot{N}} \propto \frac{1}{4Ie^{2r}}$$

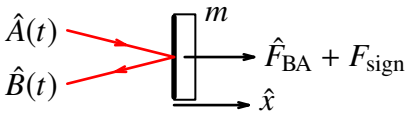
$$S[\hat{F}_{\mathrm{BA}}] := S_{FF} = 4\hbar^2 k_o^2\dot{N}e^{2r} \propto \hbar^2 Ie^{2r}$$

Соотношение неопределенности:

$$S_{xx}S_{FF} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Обнаружение слабой классической силы

Простейшая оптомеханическая система



$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\hat{x}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\rm BA}(\Omega) = 2\hbar k_o A\hat{a}_c(\Omega)$$

Уравнение движения для зеркала:

$$\hat{x}(\Omega) = \chi(\Omega)[\hat{F}_{\rm BA}(\Omega) + F_{\rm sign}(\Omega)]$$

Оценка силы:

$$\tilde{F}_{\rm sign}(\Omega) = \frac{\hat{b}_s(\Omega)}{2k_o A\chi(\Omega)} = F_{\rm sign}(\Omega) + \hat{F}_{\rm sum}(\Omega)$$

$$\hat{F}_{\rm sum}(\Omega) = \chi^{-1}\hat{x}_{\rm meas}(\Omega) + \hat{F}_{\rm BA}(\Omega);\ \hat{x}_{\rm meas}(\Omega) = \frac{\hat{a}_s(\Omega)}{2k_o A}$$

Стандартный Квантовый Предел

$$S[\hat{x}_{\rm meas}] := S_{xx} = \frac{e^{-2r}}{16k_o^2\dot{N}} \propto \frac{1}{4Ie^{2r}}$$

$$S[\hat{F}_{\rm BA}] := S_{FF} = 4\hbar^2 k_o^2\dot{N}e^{2r} \propto \hbar^2 Ie^{2r}$$

Соотношение неопределенности:

$$S_{xx}S_{FF} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Суммарный шум:

$$S^F = \chi^{-2}S_{xx} + S_{FF}$$

СКП: $\geqslant S^F_{\rm SQL} = \hbar\chi^{-1}$

Обнаружение слабой классической силы

Стандартный Квантовый Предел

$$S_{xx} \propto \frac{1}{Ie^{2r}}; \quad S_{FF} \propto Ie^{2r}$$

Соотношение неопределенности:

$$S_{xx}S_{FF} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Суммарный шум:

$$S^F = \chi^{-2}S_{xx} + S_{FF}$$

СКП: $\geqslant S^F_{\mathrm{SQL}} = \hbar\chi^{-1}$

Обнаружение слабой классической силы

Стандартный Квантовый Предел

$$S_{xx} \propto \frac{1}{Ie^{2r}}; \quad S_{FF} \propto Ie^{2r}$$

Соотношение неопределенности:

$$S_{xx}S_{FF} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Суммарный шум:

$$S^F = \chi^{-2}S_{xx} + S_{FF}$$

СКП: $\geqslant S^F_{\mathrm{SQL}} = \hbar\chi^{-1}$

Свободная масса

$$\chi = \frac{1}{-m\Omega^2} \Rightarrow$$

$$S^F = m^2\Omega^4 S_{xx} + S_{FF} \geqslant S^F_{\mathrm{SQL}} = \hbar m\Omega^2$$

Обнаружение слабой классической силы

Стандартный Квантовый Предел

$$S_{xx} \propto \frac{1}{Ie^{2r}}; \quad S_{FF} \propto Ie^{2r}$$

Соотношение неопределенности:

$$S_{xx}S_{FF} = \frac{\hbar^2}{4}$$

Суммарный шум:

$$S^F = \chi^{-2}S_{xx} + S_{FF}$$

СКП: $\geqslant S^F_{\mathrm{SQL}} = \hbar\chi^{-1}$

Свободная масса

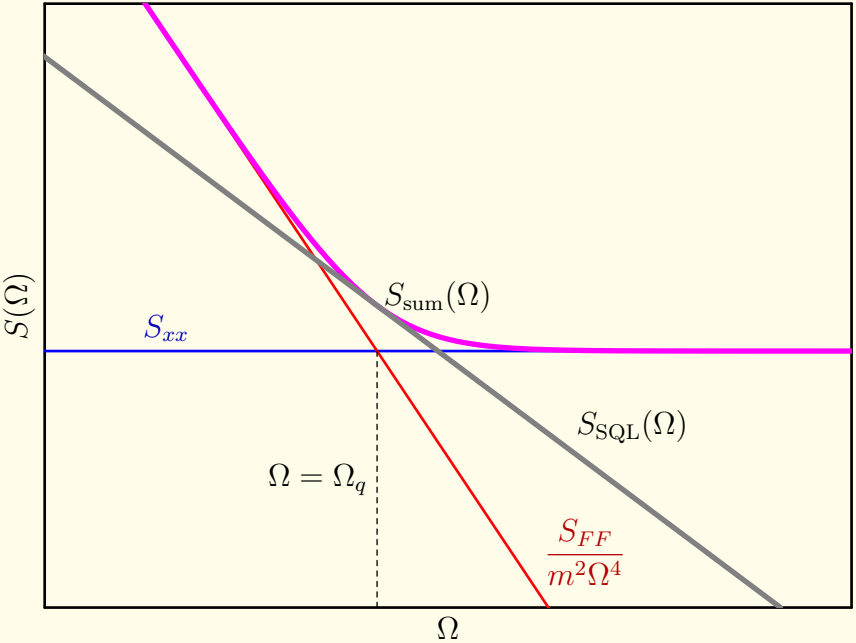
$$\chi = \frac{1}{-m\Omega^2} \Rightarrow$$

$$S^F = m^2\Omega^4 S_{xx} + S_{FF} \geqslant S^F_{\mathrm{SQL}} = \hbar m\Omega^2$$

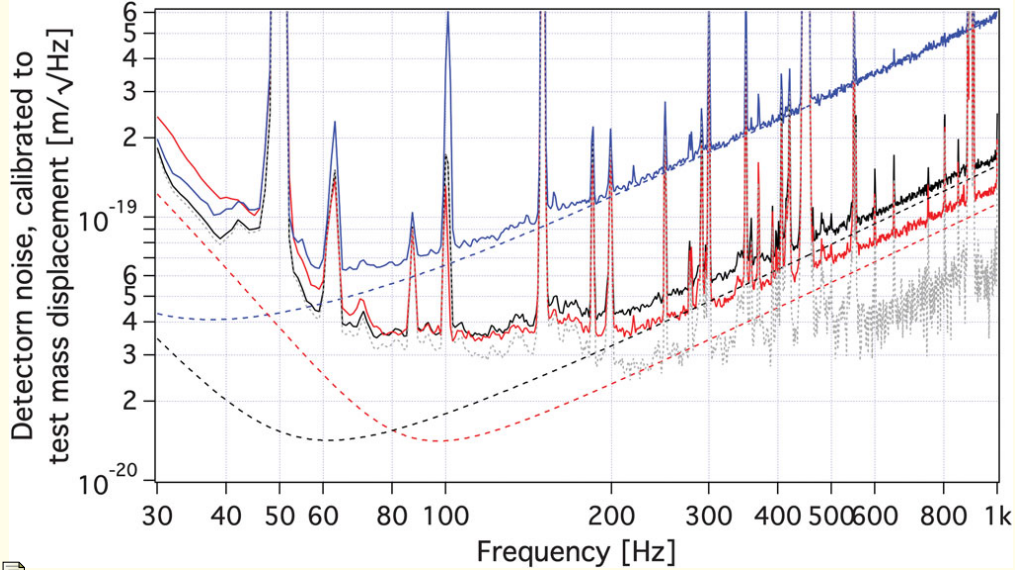
GW community:
пересчет в вариацию метрики.

$$F_{\mathrm{sign}} = \frac{mL\ddot{h}}{2} \Rightarrow S^h = \frac{4}{L^2}\frac{S^F}{m^2\Omega^4}$$

$$= S_{xx} + \frac{S_{FF}}{m^2\Omega^4} \geqslant S^h_{\mathrm{SQL}} = \frac{4}{L^2}\frac{\hbar}{m\Omega^2}$$


$S(\Omega)$
S_{xx}
$S_{\mathrm{sum}}(\Omega)$
$S_{\mathrm{SQL}}(\Omega)$
$\Omega = \Omega_q$
$\frac{S_{FF}}{m^2\Omega^4}$
Ω

ГВ детекторы



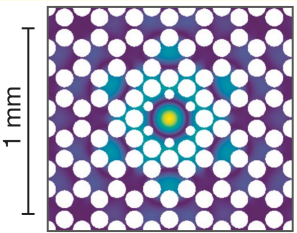
Vacuum

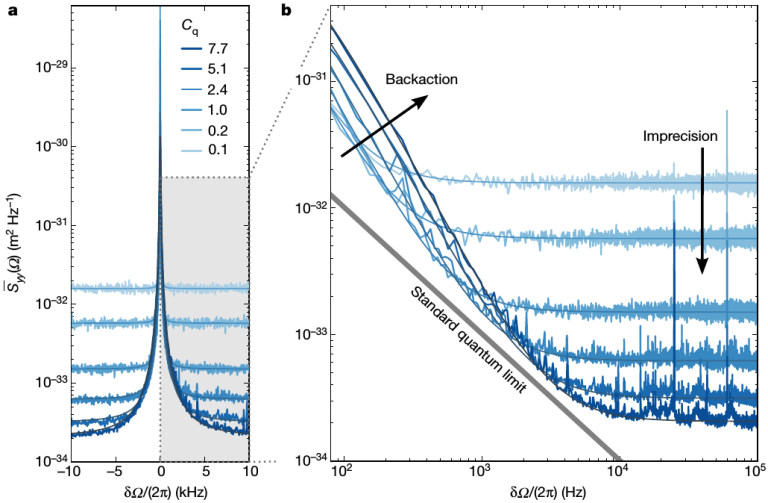
Phase squeezing

Amplitude squeezing

F.Acernese *et al*, PRL **125**, 131101 (2020)

“Настольные” интерферометры





M.Rossi *et al*, Nature **563**, 53 (2018)

А можно ли преодолеть СКП?

Линейная квантовая система

$$\hat{U}_1(t) = \hat{U}_1^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_{11}(t,t')q_1(t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} \chi_{12}(t,t')q_2(t')\,dt'$$

$$\hat{U}_2(t) = \hat{U}_2^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_{21}(t,t')q_1(t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} \chi_{22}(t,t')q_2(t')\,dt'$$

шум динамика

Ю.И.Воронцов, Ф.Я.Халили, Радиотехника и Электроника **27**, 2392 (1982)

V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, "Quantum Measurement Cambridge Univ. Press, 1992

Линейная квантовая система

$$\hat{U}_1(t) = \hat{U}_1^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_{11}(t,t')q_1(t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} \chi_{12}(t,t')q_2(t')\,dt'$$

$$\hat{U}_2(t) = \hat{U}_2^{(0)}(t) + \int_{-\infty}^{t} \chi_{21}(t,t')q_1(t')\,dt' + \int_{-\infty}^{t} \chi_{22}(t,t')q_2(t')\,dt'$$

шум динамика

$$\forall\{Q_j(t)\}:$$

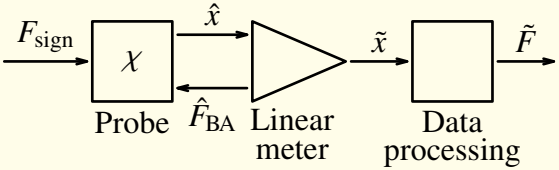
$$\sum_{j,k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t)Q_k(t')B_{jk}(t,t')\,dtdt' \geqslant \frac{i\hbar}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t)Q_k(t')\big(\chi_{jk}(t,t') - \chi_{kj}(t',t)\big)\,dtdt'$$

$$B_{jk}(t,t') = \left\langle \hat{U}_j^{(0)}(t) \circ \hat{U}_k^{(0)}(t') \right\rangle$$

Ю.И.Воронцов, Ф.Я.Халили, Радиотехника и Электроника **27**, 2392 (1982)

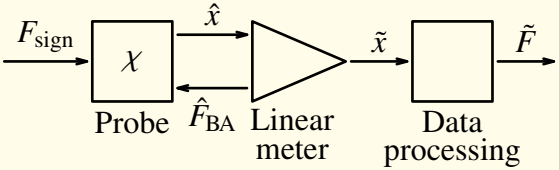
V.B.Braginsky, F.Ya.Khalili, "Quantum Measurement Cambridge Univ. Press, 1992

Линейная пробная система



ОЧЕНЬ малые смещения: $x \sim 10^{-15} \div 10^{-18}$ м $\ll \dfrac{\lambda}{\mathcal{F}} \quad \Rightarrow$
можно линеаризовать.

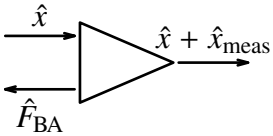
Линейная пробная система



ОЧЕНЬ малые смещения: $x \sim 10^{-15} \div 10^{-18}$ м $\ll \dfrac{\lambda}{\mathcal{F}} \quad \Rightarrow$
можно линеаризовать.

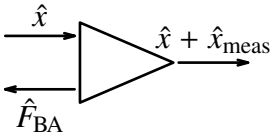
Поиск под фонарем: стационарные системы.

Линейный измеритель



(упрощенная версия, $K = 0$)

Линейный измеритель



(упрощенная версия, $K = 0$)

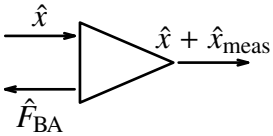
Стационарная система:

$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

Новые степени свободы:

- Кросс-корреляция: $S_{xF} \neq 0$
- Частотные зависимости: “(Ω)”

Линейный измеритель



(упрощенная версия, $K = 0$)

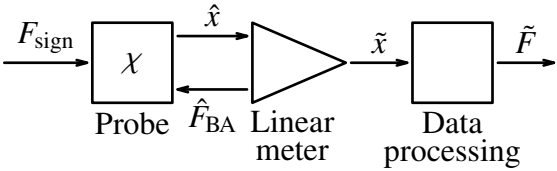
Стационарная система:

$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

Новые степени свободы:

- Кросс-корреляция: $S_{xF} \neq 0$
- Частотные зависимости: “(Ω)”

Линейная пробная система

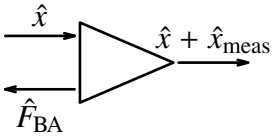


$$\hat{x} = \chi(\hat{F}_{\text{BA}} + F_{\text{sign}}); \quad \tilde{x} = \hat{x} + \hat{x}_{\text{meas}}$$

$$\tilde{F}_{\text{sign}} = \chi^{-1}\tilde{x} = F_{\text{sign}} + \hat{F}_{\text{sum}}$$

$$\hat{F}_{\text{sum}} = \chi^{-1}\hat{x}_{\text{meas}} + \hat{F}_{\text{BA}}$$

Линейный измеритель



(упрощенная версия, $K = 0$)

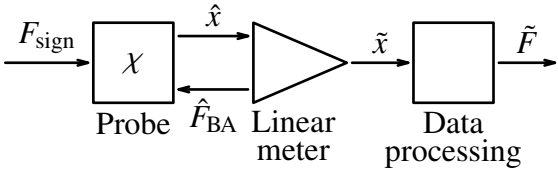
Стационарная система:

$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

Новые степени свободы:

- Кросс-корреляция: $S_{xF} \neq 0$
- Частотные зависимости: “(Ω)”

Линейная пробная система



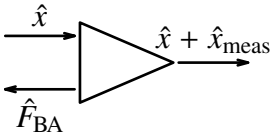
$$\hat{x} = \chi(\hat{F}_{\text{BA}} + F_{\text{sign}}); \quad \tilde{x} = \hat{x} + \hat{x}_{\text{meas}}$$

$$\tilde{F}_{\text{sign}} = \chi^{-1}\tilde{x} = F_{\text{sign}} + \hat{F}_{\text{sum}}$$

$$\hat{F}_{\text{sum}} = \chi^{-1}\hat{x}_{\text{meas}} + \hat{F}_{\text{BA}}$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Линейный измеритель



(упрощенная версия, $K = 0$)

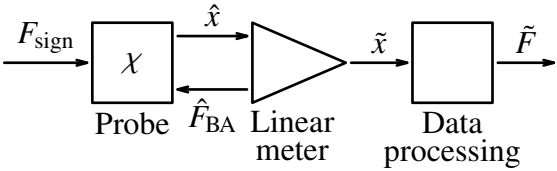
Стационарная система:

$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

Новые степени свободы:

- Кросс-корреляция: $S_{xF} \neq 0$
- Частотные зависимости: “(Ω)”

Линейная пробная система



$$\hat{x} = \chi(\hat{F}_{\text{BA}} + F_{\text{sign}}); \quad \tilde{x} = \hat{x} + \hat{x}_{\text{meas}}$$

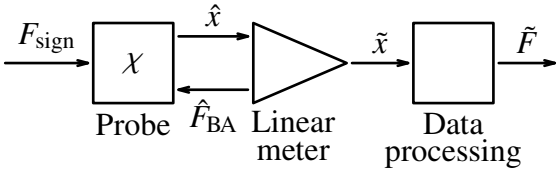
$$\tilde{F}_{\text{sign}} = \chi^{-1}\tilde{x} = F_{\text{sign}} + \hat{F}_{\text{sum}}$$

$$\hat{F}_{\text{sum}} = \chi^{-1}\hat{x}_{\text{meas}} + \hat{F}_{\text{BA}}$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

Линейная пробная система

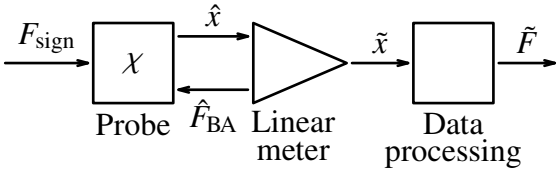


$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

Линейная пробная система



$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

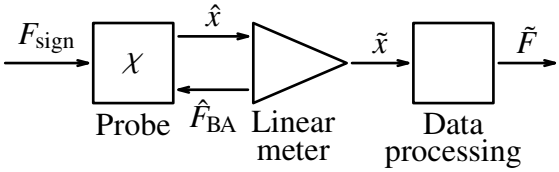
Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

(Почти общий) предел чувствительности

СКП нет! Взамен:

F.Ya.Khalili and E.Zeuthen, PRA **103**, 043721 (2021)

Линейная пробная система



$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

(Почти общий) предел чувствительности

СКП нет! Взамен:

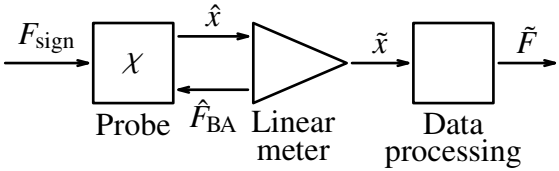
$$S_{\text{sum}}(\Omega) = \begin{cases} S_{\text{UB}}, & S_{FF} < S_{\text{thr}} \\ S_{\text{DQL}} = \hbar|\operatorname{Im}\chi^{-1}|, & S_{FF} \geqslant S_{\text{thr}} \end{cases}$$

Dissipative Quantum Limit

$$S_{\text{thr}} = \frac{\hbar}{2|\operatorname{Im}\chi|}$$

F.Ya.Khalili and E.Zeuthen, PRA **103**, 043721 (2021)

Линейная пробная система



$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

(Почти общий) предел чувствительности

СКП нет! Взамен:

$$S_{\text{sum}}(\Omega) = \begin{cases} S_{\text{UB}}, & S_{FF} < S_{\text{thr}} \\ S_{\text{DQL}} = \hbar|\operatorname{Im}\chi^{-1}|, & S_{FF} \geqslant S_{\text{thr}} \end{cases}$$

Dissipative Quantum Limit

$$S_{\text{thr}} = \frac{\hbar}{2|\operatorname{Im}\chi|}$$

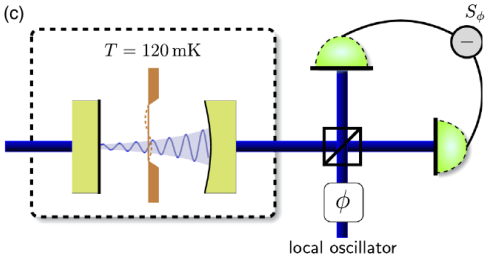
$$S_{\text{UB}} = \frac{S_{\text{DQL}}}{2}\left(\frac{S_{\text{thr}}}{S_{FF}} + \frac{S_{FF}}{S_{\text{thr}}}\right) \geqslant S_{\text{QCRB}}$$

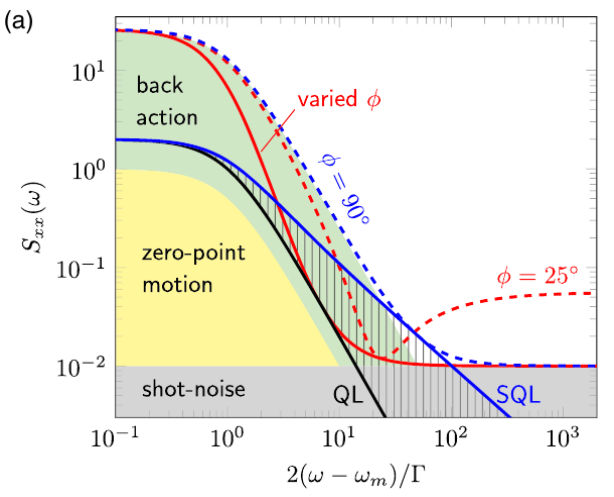
$$S_{\text{QCRB}} = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}|^2}{4S_{FF}} \propto \frac{1}{I}$$

Quantum Cramer-Rao Bound
= Energetic Quantum Limit

F.Ya.Khalili and E.Zeuthen, PRA **103**, 043721 (2021)

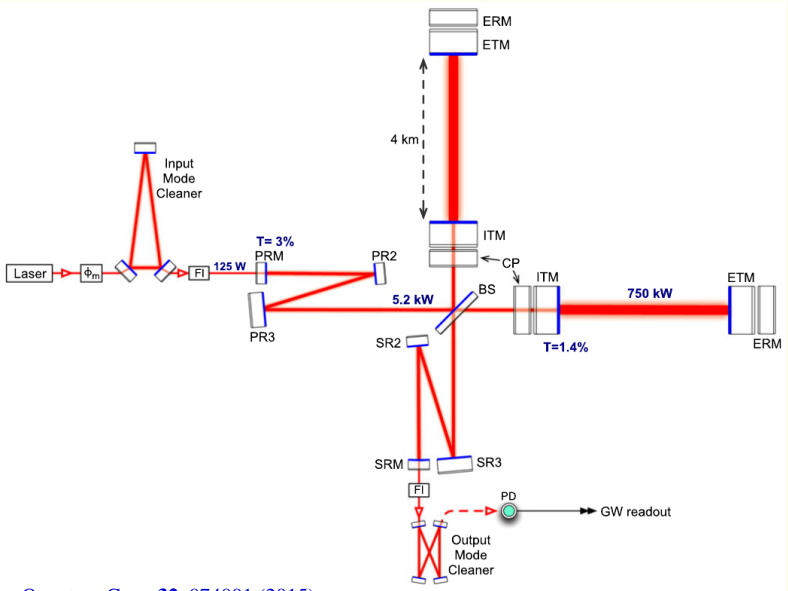
“Настольные” интерферометры: DQL





N.S.Kampel *et al*, PRX **7**, 021008 (2017)

“Большие” интерферометры: QCRB



$I \to 1$ МВт

J.Aasi *et al*, Class. Quantum Grav. **32**, 074001 (2015)

Что еще надо сделать?

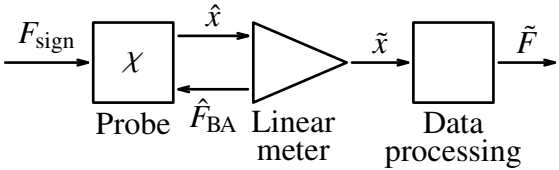
$$\forall \{Q_j(t)\} :$$

$$\sum_{j,k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') B_{jk}(t,t')\, dt dt' \geqslant \frac{i\hbar}{2} \sum_{j,k=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} Q_j^*(t) Q_k(t') \big(\chi_{jk}(t,t') - \chi_{kj}(t',t)\big)\, dt dt'$$

$$B_{jk}(t,t') = \left\langle \hat{U}_j^{(0)}(t) \circ \hat{U}_k^{(0)}(t') \right\rangle$$

Нестационарные системы...

Линейная пробная система

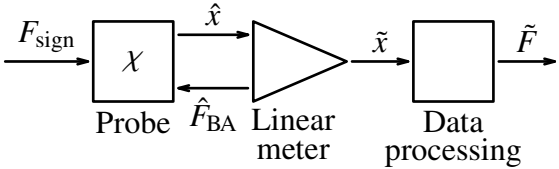


$$S_{xx}(\Omega)S_{FF}(\Omega) - |S_{xF}(\Omega)|^2 \geqslant \hbar|\operatorname{Im} S_{xF}(\Omega)| + \frac{\hbar^2}{4} \qquad (*)$$

$$S^F(\Omega) = |\chi^{-1}(\Omega)|^2 S_{xx}(\Omega) + 2\operatorname{Re}[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega)] + S_{FF}(\Omega) \qquad (**)$$

Задача: найти минимум (**)
при условии (*) и заданном $S_{FF} \propto I$.

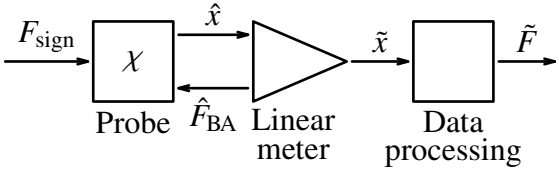
Немного упрощенный вариант



$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

Немного упрощенный вариант



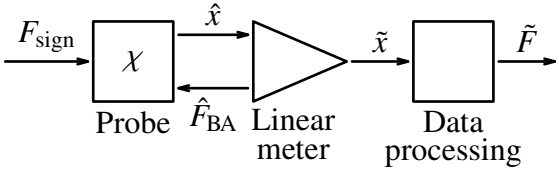
$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

$$S_{xF}(\Omega) = -\chi(\Omega)S_{FF}(\Omega) \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_{FF}(\Omega)} \propto \frac{1}{I}$$

Немного упрощенный вариант



$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

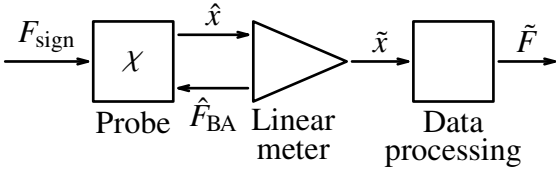
$$S_{xF}(\Omega) = -\chi(\Omega)S_{FF}(\Omega) \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_{FF}(\Omega)} \propto \frac{1}{I}$$

Как сделать кросс-корреляцию?

$$\hat{x}_{\text{meas}} = \frac{\hat{a}_s}{2k_oA}; \quad \hat{F}_{\text{BA}} = 2\hbar k_o A\hat{a}_c$$

Немного упрощенный вариант



$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

$$S_{xF}(\Omega) = -\chi(\Omega)S_{FF}(\Omega) \;\Rightarrow$$

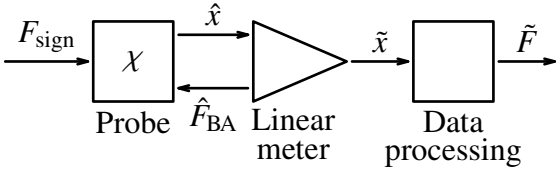
$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_{FF}(\Omega)} \propto \frac{1}{I}$$

Как сделать кросс-корреляцию?

$$\hat{x}_{\text{meas}} = \frac{\hat{a}_s}{2k_oA}; \quad \hat{F}_{\text{BA}} = 2\hbar k_o A\hat{a}_c \;\Rightarrow$$

$$S_{xF} = \hbar S[\hat{a}_s\hat{a}_c] = \hbar S_{sc}$$

Немного упрощенный вариант



$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

$$S_{xF}(\Omega) = -\chi(\Omega)S_{FF}(\Omega) \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_{FF}(\Omega)} \propto \frac{1}{I}$$

Как сделать кросс-корреляцию?

$$\hat{x}_{\text{meas}} = \frac{\hat{a}_s}{2k_oA}; \quad \hat{F}_{\text{BA}} = 2\hbar k_o A\hat{a}_c \;\Rightarrow$$

$$S_{xF} = \hbar S[\hat{a}_s\hat{a}_c] = \hbar S_{sc}$$

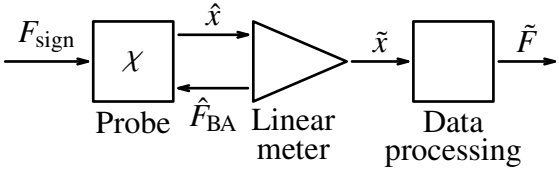
Нет проблем, “косое” сжатие:

$$S_{cc} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2r + \operatorname{sh} 2r\cos 2\theta)$$

$$S_{ss} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2r - \operatorname{sh} 2r\cos 2\theta)$$

$$S_{sc} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2r\sin 2\theta$$

Немного упрощенный вариант



$$\operatorname{Im}\chi = 0; \quad \operatorname{Im} S_{xF} = 0 \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) + \frac{1}{S_{FF}(\Omega)}\left[\chi^{-1}(\Omega)S_{xF}(\Omega) + S_{FF}(\Omega)\right]^2$$

$$S_{xF}(\Omega) = -\chi(\Omega)S_{FF}(\Omega) \;\Rightarrow$$

$$S^F(\Omega) = S_{\text{QCRB}}(\Omega) = \frac{\hbar^2|\chi^{-1}(\Omega)|^2}{4S_{FF}(\Omega)} \propto \frac{1}{I}$$

Как сделать кросс-корреляцию?

$$\hat{x}_{\text{meas}} = \frac{\hat{a}_s}{2k_oA}; \quad \hat{F}_{\text{BA}} = 2\hbar k_o A\hat{a}_c \;\Rightarrow$$

$$S_{xF} = \hbar S[\hat{a}_s\hat{a}_c] = \hbar S_{sc}$$

Нет проблем, “косое” сжатие:

$$S_{cc} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2r + \operatorname{sh} 2r\cos 2\theta)$$

$$S_{ss} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2r - \operatorname{sh} 2r\cos 2\theta)$$

$$S_{sc} = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2r\sin 2\theta$$

$$S_{xF}(\Omega) = \frac{S_{FF}}{m\Omega^2}$$

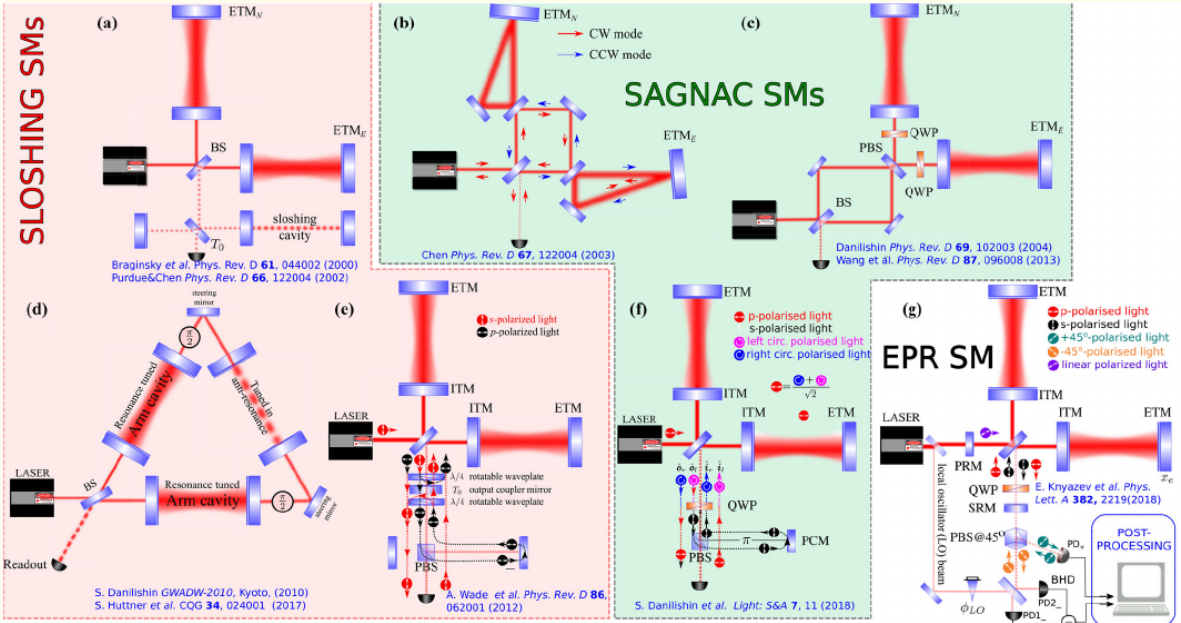
Как сделать частотно-зависимую кросс-корреляцию?

- Quantum speedmeter
- Filter cavities
- Negative mass
- ...

V.Braginsky, F.Khalili, Phys.Lett. A, **147**, 251 (1990)

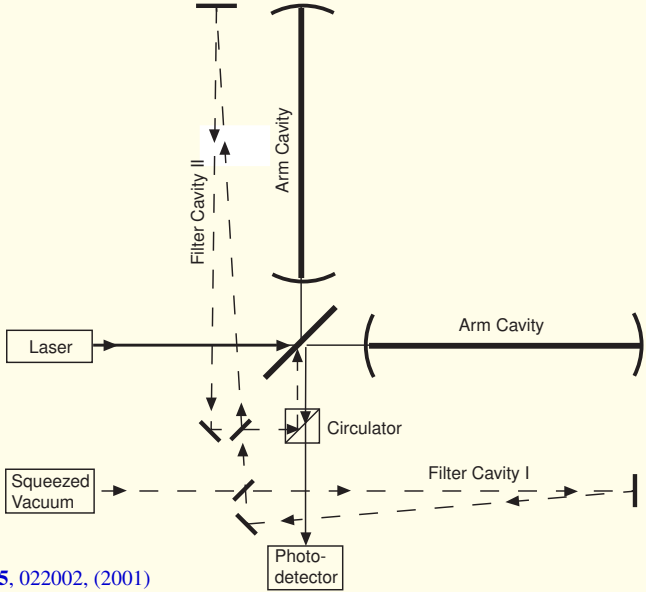
H.J.Kimble *et al*, PRD **65** 022002 (2001)

C.Møller *et al*, Nature **547**, 191 (2017)



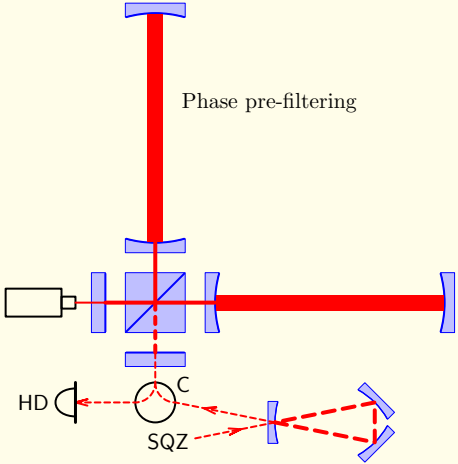
S.L.Danilishin, F.Ya.Khalili, and Haixing Miao, Living Reviews in Relativity **22**, 2 (2019)

Pre-filtering



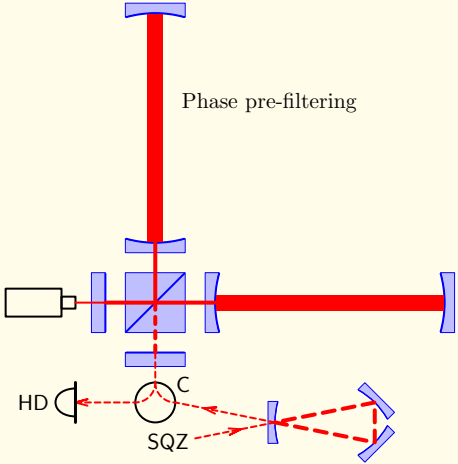
H.J.Kimble *et al*, PRD **65**, 022002, (2001)

Pre-filtering



Сжатый свет отражается от дополнительного резонатора с $\gamma = \delta = \Omega_q \sim 100\,\mathrm{Hz}$

Pre-filtering

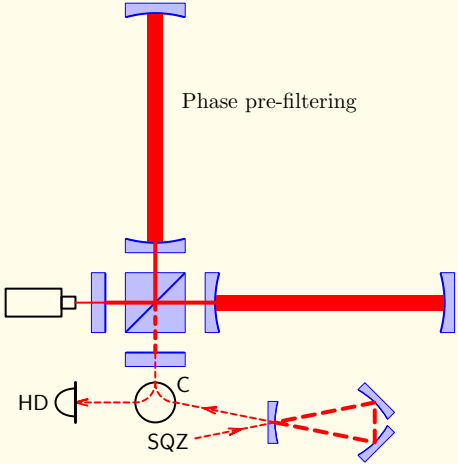


Сжатый свет отражается от дополнительного резонатора с $\gamma = \delta = \Omega_q \sim 100\,\mathrm{Hz}$

Частотно-зависимый угол сжатия

$$S^F(\Omega) = m^2\Omega^4 S_{xx} - 2m\Omega^2 S_{xF} + S_{FF}$$

Pre-filtering



Сжатый свет отражается от дополнительного резонатора с $\gamma = \delta = \Omega_q \sim 100\,\mathrm{Hz}$

Частотно-зависимый угол сжатия

$$S^F(\Omega) = m^2\Omega^4 S_{xx} - 2m\Omega^2 S_{xF} + S_{FF}$$

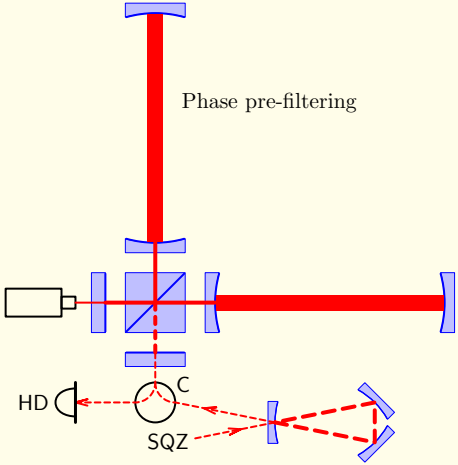
Теория

$$\Omega \to \infty : \quad S_{xx} \propto e^{-2r}, \; S_{FF} \propto e^{2r}$$

$$\Omega \to 0 : \quad S_{xx} \propto e^{2r}, \; S_{FF} \propto e^{-2r}$$

$$S^F(\Omega) \propto e^{-2r}$$

Pre-filtering



Сжатый свет отражается от дополнительного резонатора с $\gamma = \delta = \Omega_q \sim 100\,\mathrm{Hz}$

Частотно-зависимый угол сжатия

$$S^F(\Omega) = m^2\Omega^4 S_{xx} - 2m\Omega^2 S_{xF} + S_{FF}$$

Теория

$$\Omega \to \infty: \quad S_{xx} \propto e^{-2r}, \; S_{FF} \propto e^{2r}$$

$$\Omega \to 0: \quad S_{xx} \propto e^{2r}, \; S_{FF} \propto e^{-2r}$$

$$S^F(\Omega) \propto e^{-2r}$$

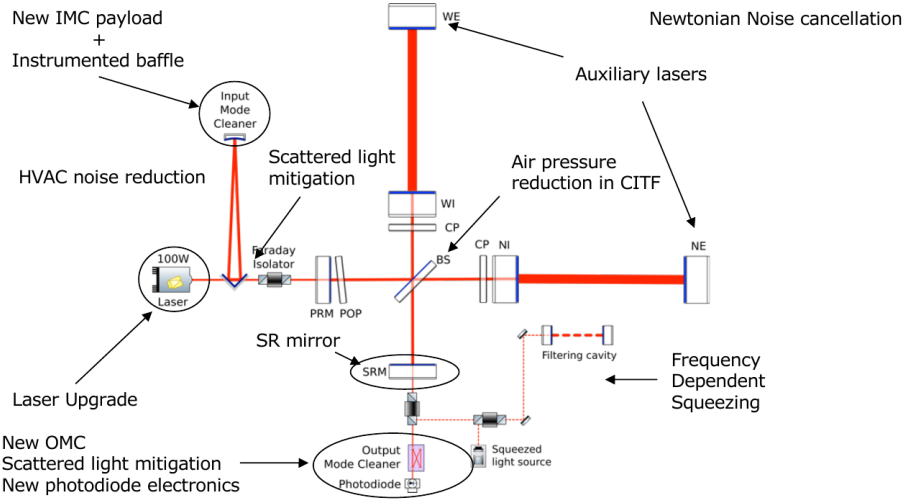
Реальность (оптические потери) $\Rightarrow$ требуются ОЧЕНЬ длинные резонаторы — километры.

Планируется 300 м $\Rightarrow$

$$\Omega \to \infty: \quad S_{xx} \propto e^{-2r}, \; S_{FF} \propto e^{2r}$$

$$\Omega \to 0: \quad S_{xx} \propto 1, \; S_{FF} \propto 1$$

AdV+ Phase I


New IMC payload
+
Instrumented baffle
Input Mode Cleaner
HVAC noise reduction
Scattered light mitigation
Air pressure reduction in CITF
Newtonian Noise cancellation
Auxiliary lasers
WE
WI
CP
BS
CP
NI
NE
100W
Laser
Faraday Isolator
PRM
POP
SR mirror
SRM
Filtering cavity
Frequency Dependent Squeezing
Laser Upgrade
New OMC
Scattered light mitigation
New photodiode electronics
Output Mode Cleaner
Photodiode
Squeezed light source

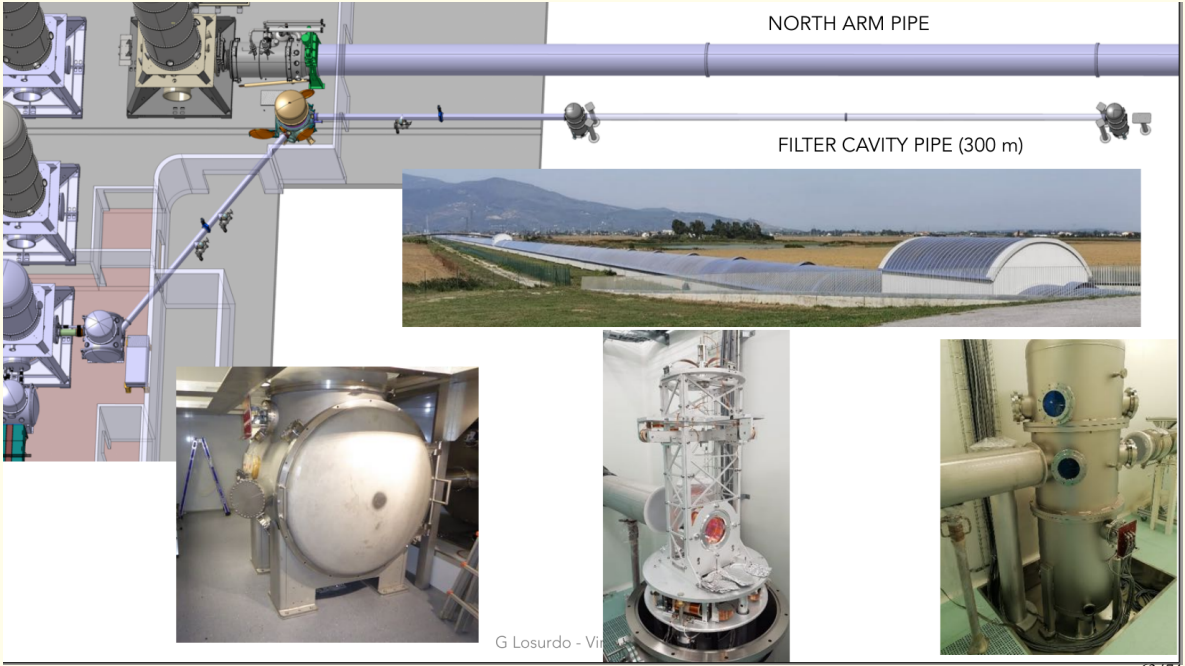
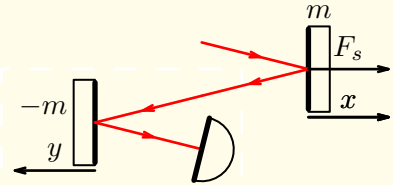

NORTH ARM PIPE
FILTER CAVITY PIPE (300 m)
G Losurdo - Vi


Photo: E Sacchetti

“Обычная” + отрицательная массы

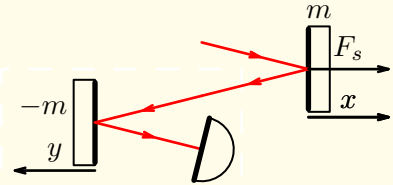


$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A[\hat{x}(\Omega) + \hat{y}(\Omega)]$$

$$\chi^{-1}(\Omega)\hat{x}(\Omega) = \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) + F_{\mathrm{sigb}}$$

$$-\chi^{-1}(\Omega)\hat{y}(\Omega) = \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega)$$ (тот же свет, та же F_{BA}!)

“Обычная” + отрицательная массы



$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A[\hat{x}(\Omega) + \hat{y}(\Omega)]$$

$$\chi^{-1}(\Omega)\hat{x}(\Omega) = \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) + F_{\mathrm{sigb}}$$

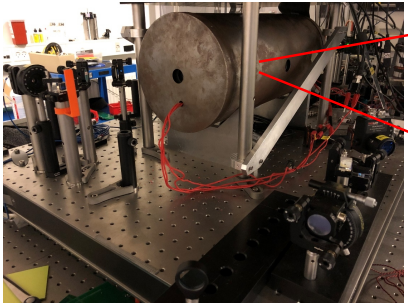
$$-\chi^{-1}(\Omega)\hat{y}(\Omega) = \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega) \quad \text{(тот же свет, та же } F_{\mathrm{BA}}\text{!)}$$

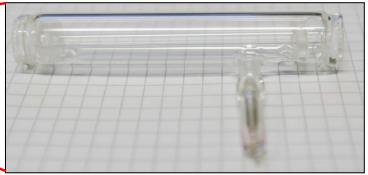
$$\hat{b}_s(\Omega) = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\left[\frac{F_s(\Omega) + \hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega)}{\chi^{-1}(\Omega)} + \frac{\hat{F}_{\mathrm{BA}}(\Omega)}{-\chi^{-1}(\Omega)}\right] = \hat{a}_s(\Omega) + 2k_o A\frac{F_{\mathrm{sign}}(\Omega)}{\chi^{-1}(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \; S_{\mathrm{sum}}(\langle\Omega\rangle) = \chi^{-2}\Omega S_{xx}$$

— back action скомпенсирован!

Atomic spin ”noise eater”



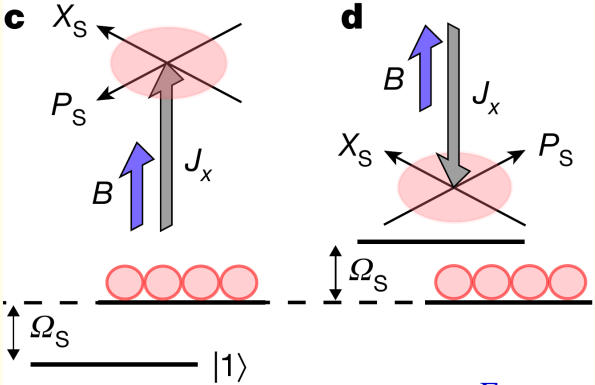


Room temperature cloud
of Caesium atoms
in magnetic field

Negative mass oscillator with tunable
Larmor frequency and decoherence time 0.1 sec

QUANTOP – Niels Bohr Institute

Ансамбль спинов 1/2 в магнитном поле



Суммарный угловой момент:

$$\hat{\mathbf{J}} = \{\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_x\} \qquad |J_{y,z}| \ll |J_x|$$

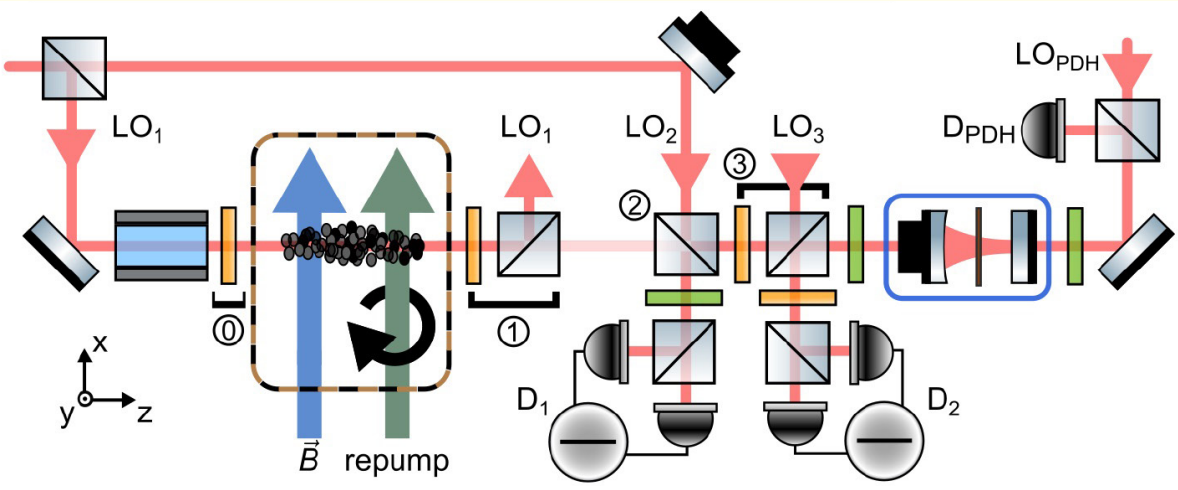
Гамильтониан:

$$\hat{\mathcal{H}}_S = \hbar\Omega_S \hat{J}_x = \pm\hbar\Omega_S\sqrt{J^2 - \hat{J}_y^2 - \hat{J}_z^2} \approx \pm\hbar\Omega_S J \mp \frac{\hbar\Omega_S}{2J}\left(\hat{J}_y^2 + \hat{J}_z^2\right) = \pm\hbar\Omega_S J \mp \frac{\hbar\Omega_S}{2}(\hat{X}_S^2 + \hat{P}_S^2)$$

(Holstein–Primakoff transformation)

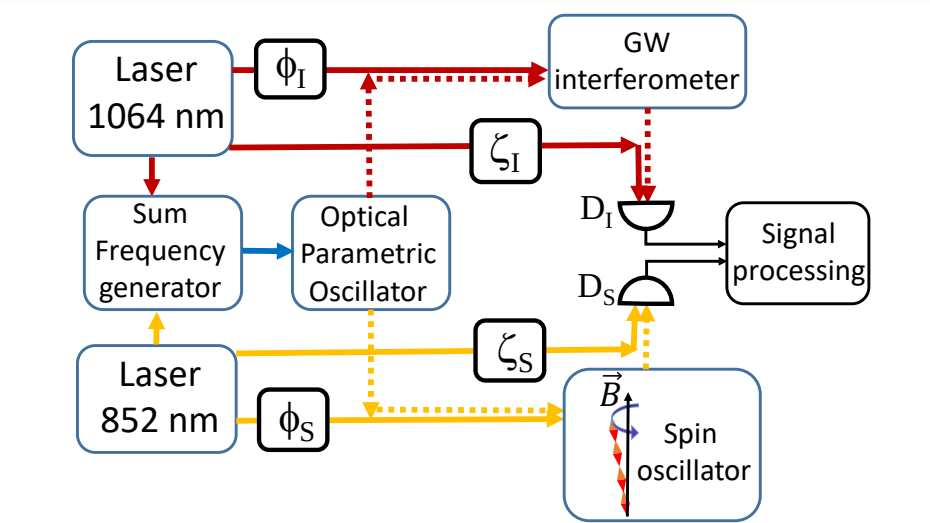
C. B. Møller et al., Nature **547**, 191 (2017)

Ансамбль спинов 1/2 в магнитном поле

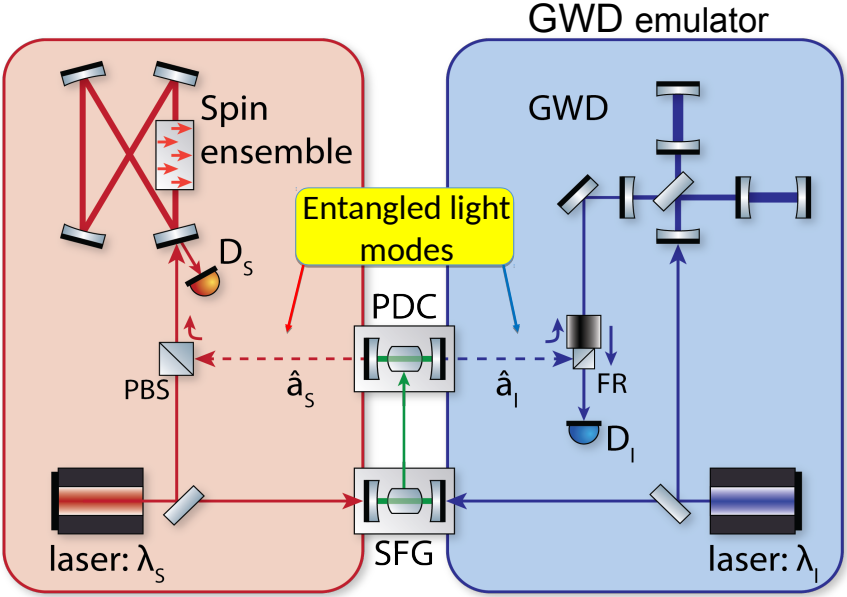


C. B. Møller et al., Nature **547**, 191 (2017)

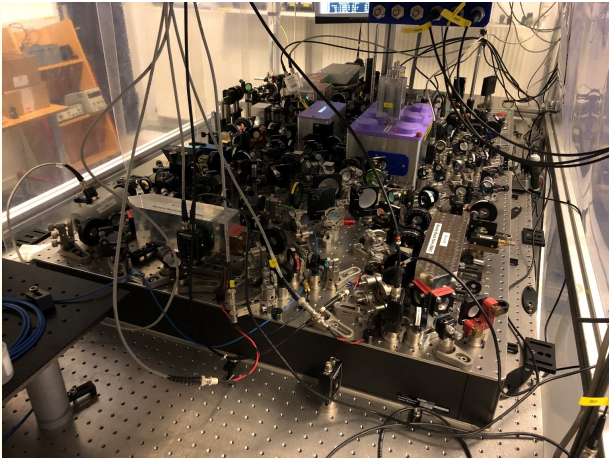
Вариант для ГВ детекторов

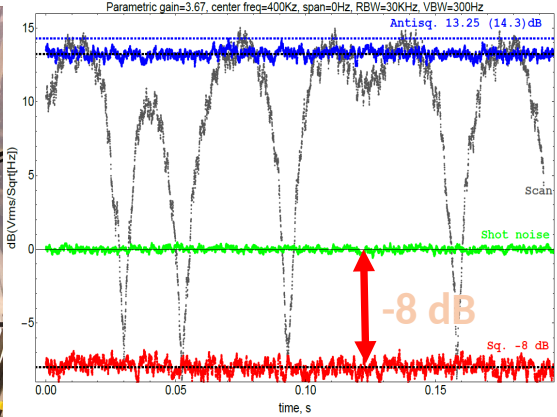


E.Zeuthen, E.S.Polzik, and F.Ya.Khalili, PRD **100**, 062004 (2019)


GWD emulator
Spin ensemble
GWD
Entangled light modes
D_S
PDC
PBS
$\hat{a}_S$
$\hat{a}_I$
FR
D_I
laser: λ_S
SFG
laser: λ_I

Two-color EPR entangled light source





Entangled state between 852nm – to spins and 1062nm – to GWD interferometer

QUANTOP – Niels Bohr Institute

Спасибо за внимание!