Информация в квантовой микроскопии

Михалычев Александр Борисович

Центр квантовой оптики и квантовой информатики

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

a.mikhalychev@ifanbel.bas-net.by, mikhalychev@gmail.com

Содержание лекции

1. ***Классическая и квантовая микроскопия***: проблема разрешения и пути ее решения.

2. ***Количественная оценка разрешения***: критерии разрешения и информация.

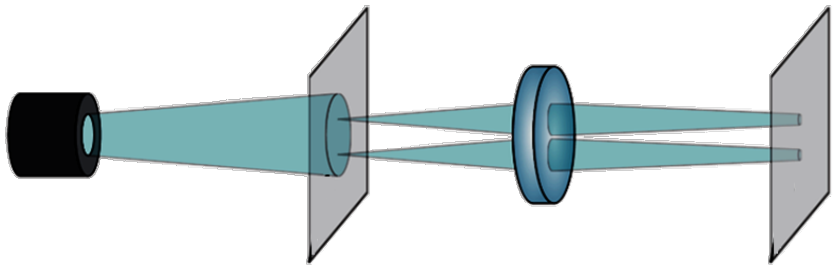
3. ***Реконструкция объекта***: как извлечь информацию из изображения.

4. ***Оптимизация квантовой микроскопии***: состояния и измерения.

5. ***Статистические методы сверхразрешения***: флуктуации источников; объединение микроскопии и метрологии.

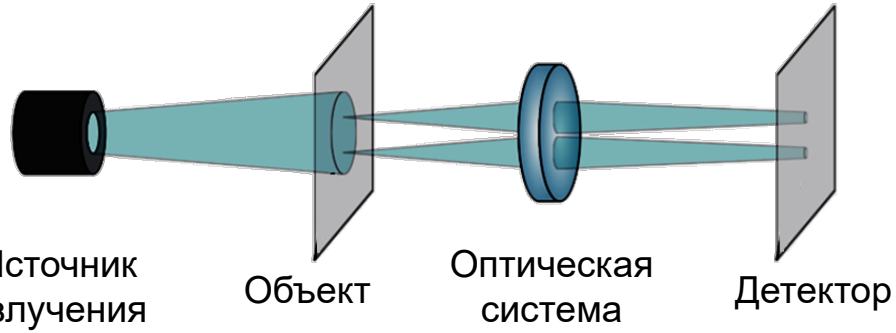
ЧАСТЬ 1. КЛАССИЧЕСКАЯ И КВАНТОВАЯ МИКРОСКОПИЯ

- ***Дифракционный предел разрешения***: почему возникает и зачем его преодолевать.
- ***Идея повышения разрешения***: чем полезны корреляции фотонов.
- ***Квантовая микроскопия***: создание и использование корреляций фотонов.
- ***Математическое описание***: эффективное уменьшение дифракционного расплывания изображения.



Оптическая микроскопия: проблема разрешения

Схема микроскопа:



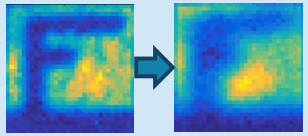
Преимущества оптической микроскопии:

- Простота измерительной установки.
- Доступность оптических элементов.
- Непосредственное наблюдение деталей.
- Неразрушающий метод.

Главный недостаток:

- Дифракционный предел разрешения

$$d_{\min} \approx \frac{\lambda}{2A_{\text{num}}} \gtrsim 200\ \text{nm}$$

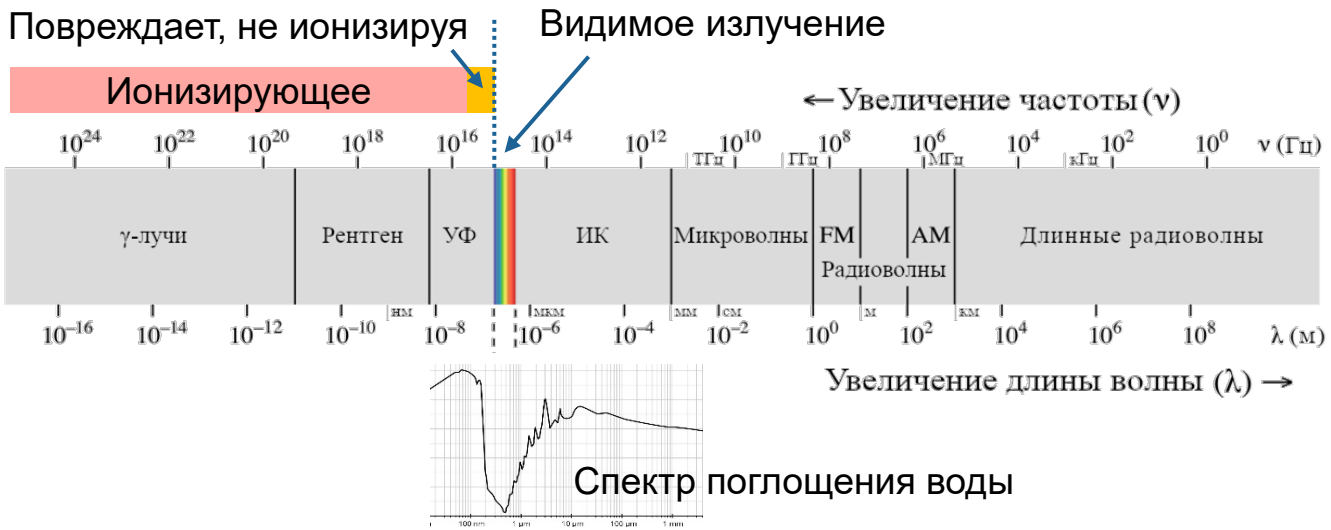


[F.R.S. Rayleigh, 1879; E. Abbe, 1873]

Другие методы анализа:

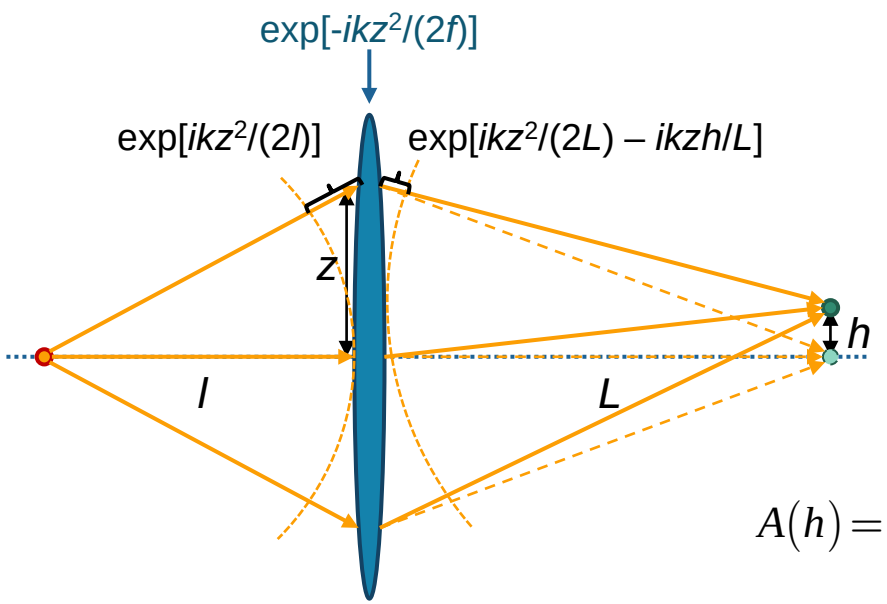
Рентгеновская микроскопия	2-20 нм	Повреждение биологических объектов
Сканирующая ближнеполевая микроскопия	2-6 нм	Необходимость сканирования образца
Сканирующая электронная микроскопия	0.5-1 нм	Необходимость сканирование, повреждение
Атомно-зондовая томография	0.1-0.5 нм	Требует разрушения образца

Длина волны и свойства излучения:



Дифракционное уширение. Причины и механизм

Формирование изображения в линзе:



$$A(h) = \int_{lens} A(z,h)\,dS$$

Для луча, прошедшего через точку z линзы:

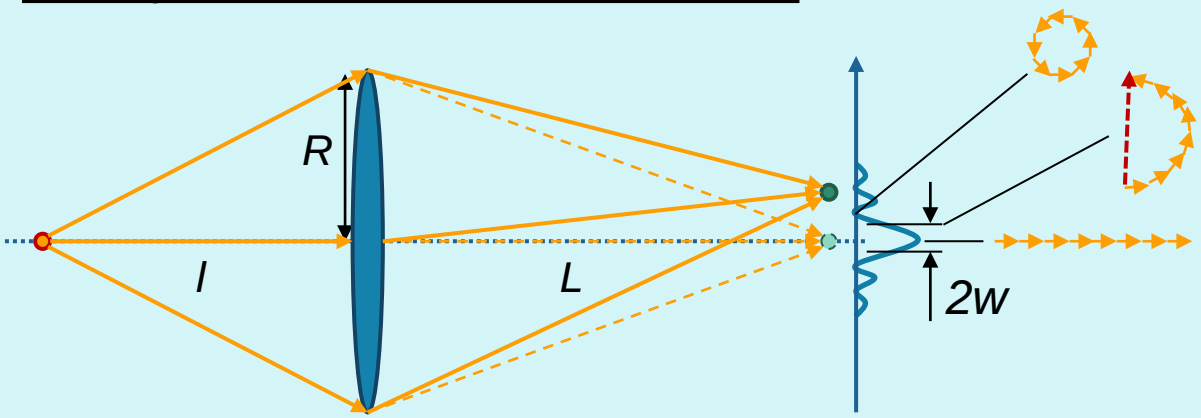
$$A(z,h) \sim \exp\left[\frac{ikz^2}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{l}+\frac{1}{L}-\frac{1}{f}\right)}_{\text{0 из уравнения тонкой линзы}} - \frac{ikzh}{L}\right]$$

Конструктивная интерференция при $h = 0$

Деструктивная интерференция при $h \neq 0$

$$A(h) \sim \delta(h)$$

Апертура линзы конечного размера:

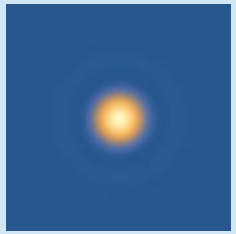


Деструктивная интерференция будет там, где для нее хватит набега фазы:

$z_{max} = R$ ➡ $kz_{max}h/L \sim \pi$ ➡ $w \sim \lambda L/(2R)$

Вывод из рассмотрения:

Условия формирования изображения определяются набегом фаз для волн, формирующих его (их конструктивной или деструктивной интерференцией)



Идея повышения разрешения

Как уменьшить дифракционное расплывание?

Нужно увеличить набег фазы:

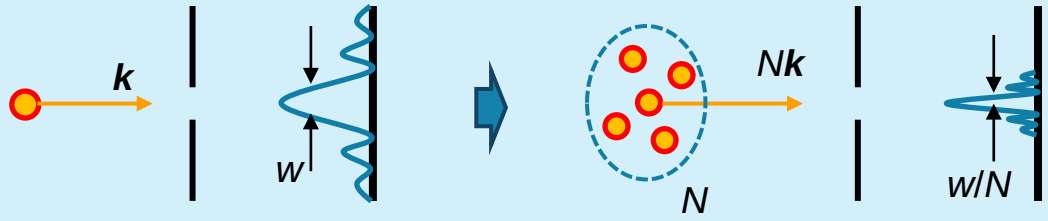
- увеличение k – более жесткое излучение;
- увеличение z_{max} / L – более хорошая оптика;
- совместный эффект от нескольких фотонов – квантовая микроскопия.

$$A(z,h) \sim \exp\left[-\frac{ikzh}{L}\right]$$

***N* фотонов в терминах волн де Бройля:**

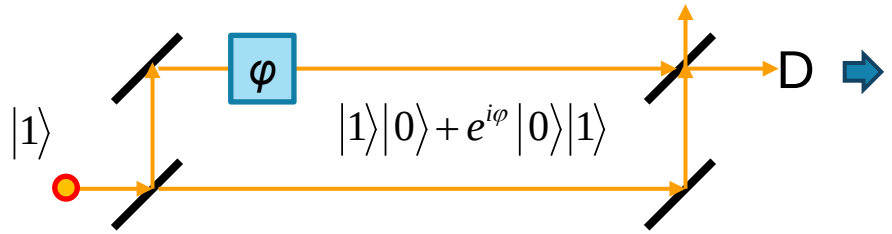
Больше суммарный импульс – меньше эффективная длина волны.

Фотоны должны распространяться как одно целое.

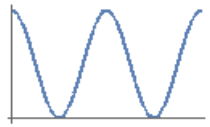


***N* фотонов в метрологии при оценке фазы:**

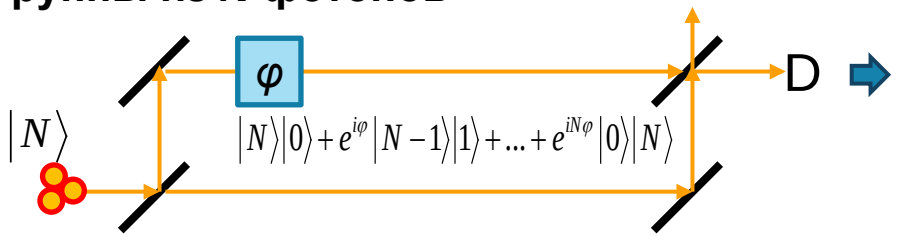
- **Независимые одиночные фотоны**



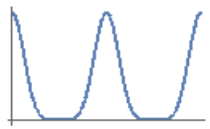
$$p_1 \sim \cos^2\varphi$$



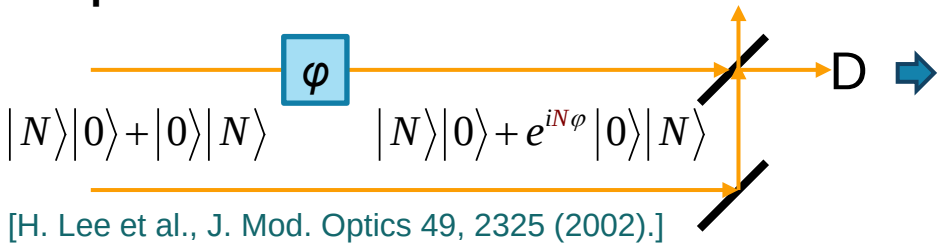
- **Группы из *N* фотонов**



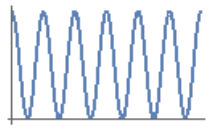
$$p_N \sim \cos^{2N}\varphi$$



- ***N* фотонов в NOON-состоянии**



$$p_N \sim \cos^2 N\varphi$$

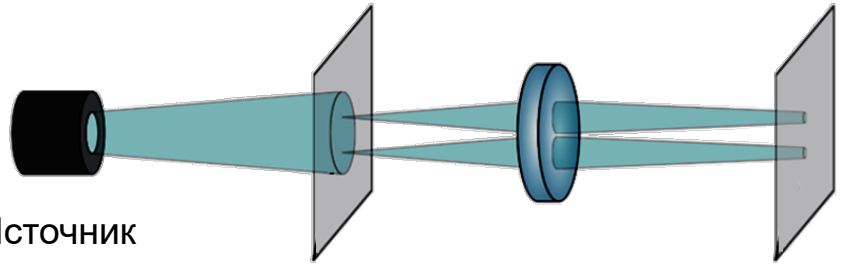


[H. Lee et al., J. Mod. Optics 49, 2325 (2002).]

Вывод из рассмотрения: Детектирование N-фотонных корреляций повышает чувствительность измерений.

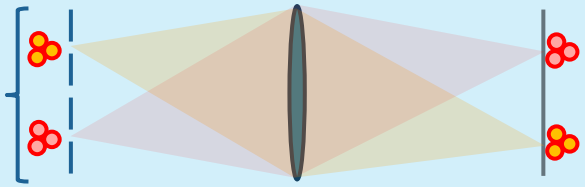
Квантовая микроскопия: излучение

Схема квантовой микроскопии:



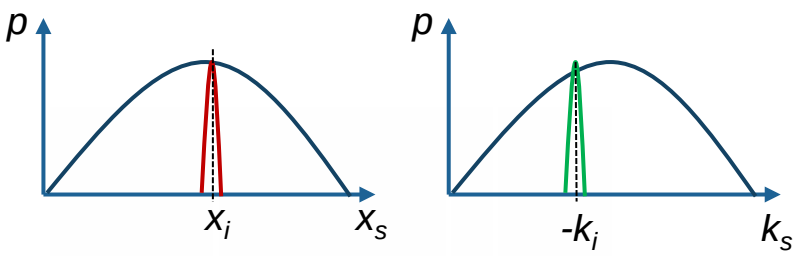
Источник излучения **с квантовыми свойствами** → Объект → Оптическая система → Детектирование **фотонных корреляций**

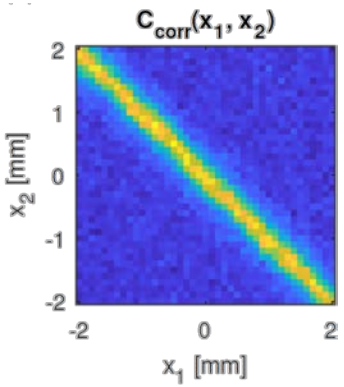
Коррелированное состояние фотонов



Регистрация совпадений

Бифотоны: корреляция координат и импульсов

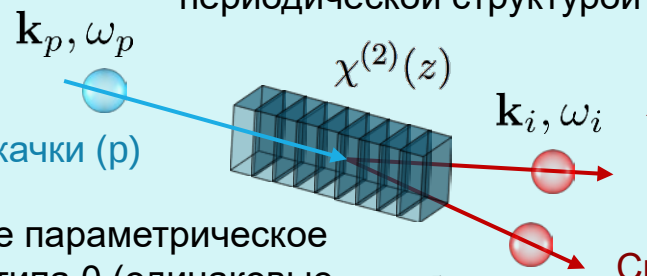




Квантово-коррелированное излучение:

Нелинейный кристалл с периодической структурой

Вырождение: $\omega_{ci} = \omega_{cs} = \omega_{cp}/2$



Фотон накачки (p)

Холостой фотон (i)

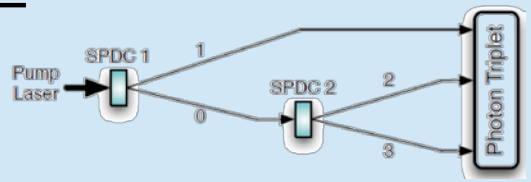
Сигнальный фотон (s)

Спонтанное параметрическое рассеяние типа 0 (одинаковые поляризации p, i, s)

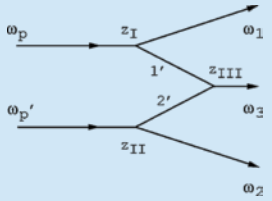
[Б. Я. Зельдович, Д. Н. Клышко, 1969; D.C. Bumham, D.L. Weinberg, 1970; A. V. Sergienko et al., 1994]

Перепутанные состояния с *N* > 2:

- каскадное СПР;
  [Hubel, H. et al., Nature 466, 601 (2010)]



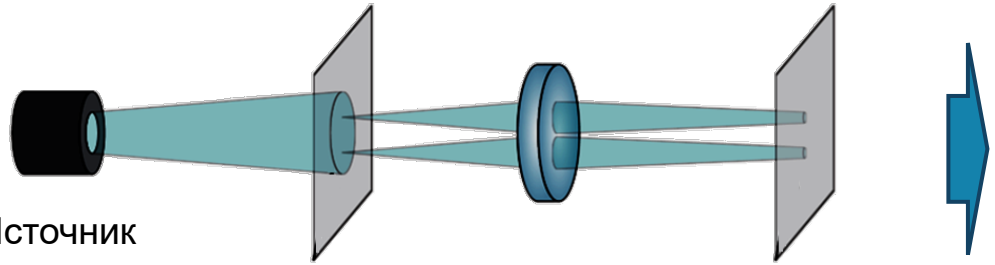
- комбинация СПР и ап-конверсии;
  [Keller, T. E. et al., Phys. Rev. A 57, 2076 (1998)]



- СПР следующих порядков.
  [Corona, M. et al., Opt. Lett. 36, 190 (2011); N. A. Borshchevskaya et al., Laser Phys. Lett. 12, 115404 (2015)]

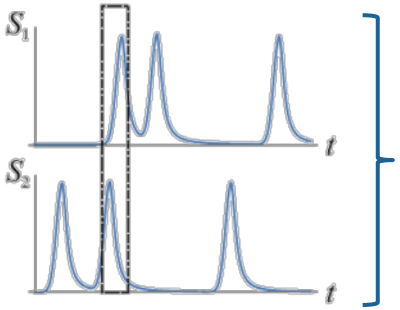
Квантовая микроскопия: детектирование

Схема квантовой микроскопии:



Источник излучения **с квантовыми свойствами** | Объект | Оптическая система | Детектирование **фотонных корреляций**

Детектирование корреляционного сигнала:



Корреляционная функция интенсивности *N*-порядка – частота регистрации *N*-фотонных совпадений внутри заданного окна

[R.J. Glauber, Phys. Rev. 130, 2529 (1963)]

$$G^{(N)}(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)=\left\langle E^{(-)}(\vec{r}_1)\ldots E^{(-)}(\vec{r}_N)E^{(+)}(\vec{r}_N)\ldots E^{(+)}(\vec{r}_1)\right\rangle$$

Геометрия детектирования:

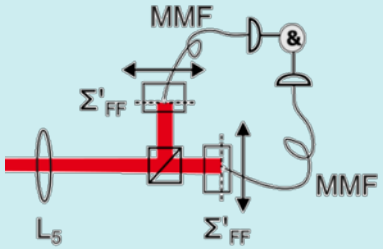
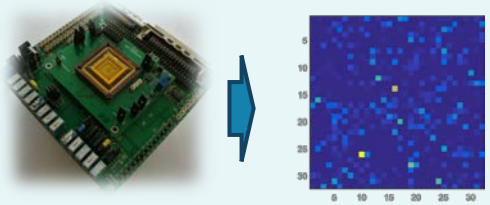
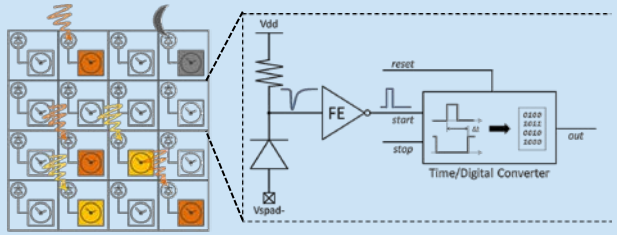
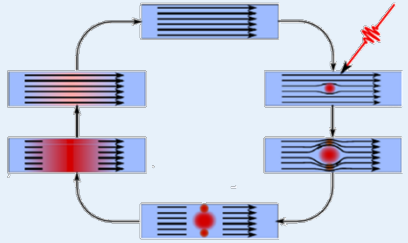
Сканирование с помощью *N* детекторов одиночных фотонов	
Матрица детекторов одиночных фотонов	

Рис. из [M. Zarghami et al., Instruments **3**, 38 (2019)]

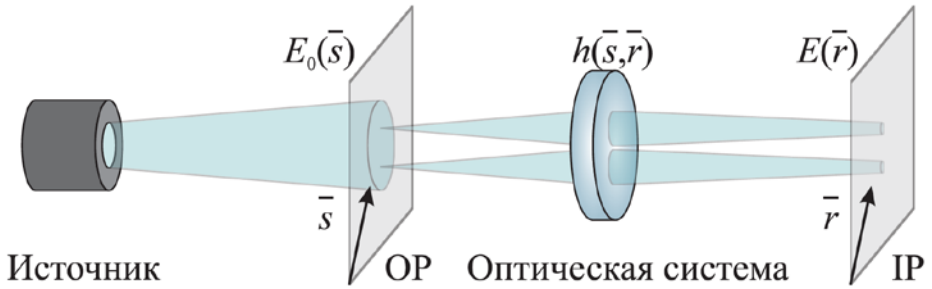
Механизмы детектирования:

Лавинные фотодиоды: $f \sim 10^7$ Гц, $\eta \sim 70\%$, $f_{DCR} \sim 25$ Гц	
Сверхпроводящие детекторы: $f \sim 10^5$ Гц, $\eta \sim 95\%$, $f_{DCR} \sim 10^2$ Гц	

[C.M. Natarajan et al., Supercond. sci. tech. **25**, 063001 (2012)]

Детектируемый сигнал

Формирование действительного изображения объекта:



$$E^{(+)}(\vec{r}) = \int_O d^2\vec{s}\; E_0^{(+)}(\vec{s})\, A(\vec{s})\, \underbrace{h(\vec{s},\vec{r})}$$

- преобразование поля в микроскопе

Функция рассеяния точки (функция Грина) оптической системы

$G^{(N)}(\vec{r}_1,\ldots,\vec{r}_N)$ - корреляции между пикселями

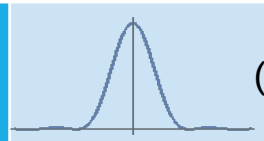
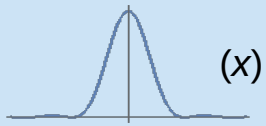
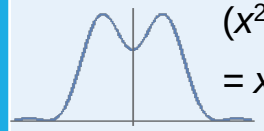
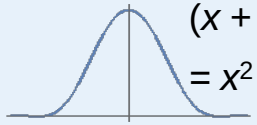
$G^{(N)}(\vec{r}) = G^{(N)}(\vec{r},\ldots,\vec{r})$ - сигнал отдельного пикселя

Выражения для сигнала:

Излучение	Сигнал	Степень *h*
Когерентное	$I(\vec{r}) \sim \left\lvert \int d^2\vec{s}\; A(\vec{s})\, h(\vec{s},\vec{r}) \right\rvert^2$	1
Некогерентное	$I(\vec{r}) \sim \int d^2\vec{s}\, \lvert A(\vec{s}) \rvert^2 \lvert h(\vec{s},\vec{r}) \rvert^2$	2
N-фотонное перепутанное	$G^{(N)}(\vec{r}) \sim \left\lvert \int d^2\vec{s}\; A^N(\vec{s})\, h^N(\vec{s},\vec{r}) \right\rvert^2$	*N*
N-фотонное классич. корр.	$G^{(N)}(\vec{r}) \sim \int d^2\vec{s}\, \lvert A(\vec{s}) \rvert^{2N} \lvert h(\vec{s},\vec{r}) \rvert^{2N}$	2*N*

[V. Giovannetti et al., Phys. Rev. A, **79**, 013827 (2009); Y. Shih, 2019]

Возведение в степень внутри и снаружи интеграла

Объект	Внутри	Снаружи
Точка	 $(x^2) = x^2$	 $(x)^2 = x^2$
2 точки	 $(x^2 + y^2) =$ $= x^2 + y^2$	 $(x + y)^2 =$ $= x^2 + y^2 + 2xy$

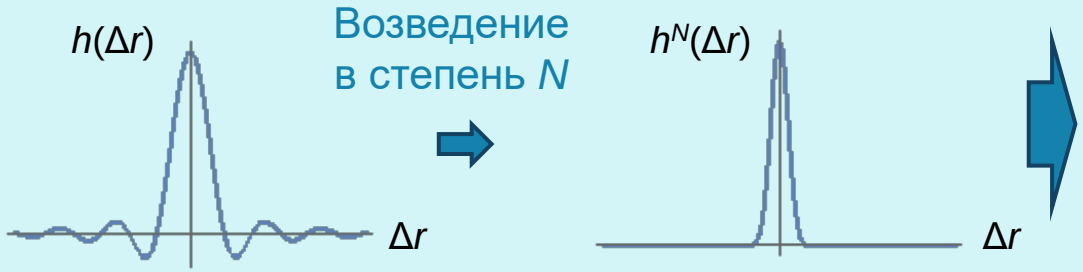
Вывод из рассмотрения: Корреляции не обязательно должны быть квантовыми! Конструктивная интерференция когерентных сигналов ухудшает разрешение.

Повышение разрешения

Излучение	Степень *h*
Когерентное	1
Некогерентное	2
N-фотонное перепутанное	*N*
N-фотонное классич. коррелир.	2*N*

Эффективное сужение ФРТ:

Возведение ФРТ в степень *N* эффективно сужает ФРТ в $\sqrt{N}$ раз.



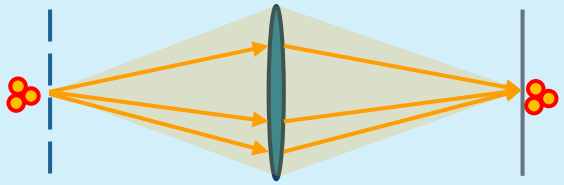
Ширина меньше в $\sqrt{N}$ раз:

$$\exp\left(-N\Delta r^2 / w^2\right) = \exp\left(-\Delta r^2 / \left(w/\sqrt{N}\right)^2\right)$$

Особенности квантовой микроскопии с действительными изображениями:

- Перепутанность (когерентность), вообще говоря, не требуется.
- Ширина ФРТ масштабируется как $1/\sqrt{N}$.

«Фотоны вместе на старте и финише, но летят раздельно»

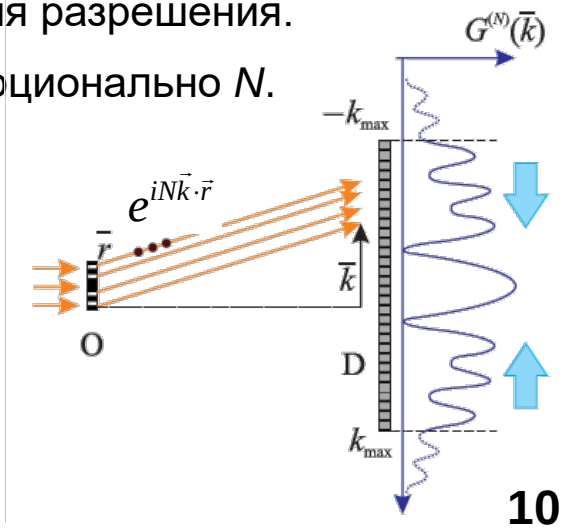


Сравнение с наблюдением фурье-образа объекта:

- Перепутанность важна для повышения разрешения.
- Фурье-спектр масштабируется пропорционально *N*.

$$G^{(N)}(\vec{k}) = \left|\int A^N(\vec{r}) e^{iN\vec{k}\cdot\vec{r}} dS\right|^2 \sim I(N\vec{k})$$

Фотоны проходят одинаковый путь – увеличение разрешения в ***N* раз**, как в метрологии с NOON-состояниями

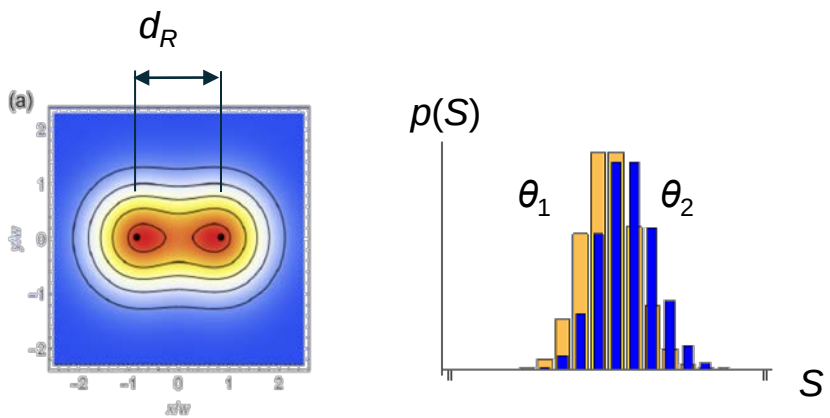


ЧАСТЬ 2. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА РАЗРЕШЕНИЯ

- ***Традиционные подходы***: визуальная различимость и частотно-контрастная характеристика.

- ***Разрешение и информация***: дискретизация, различимость и оценка погрешностей реконструкции объекта.

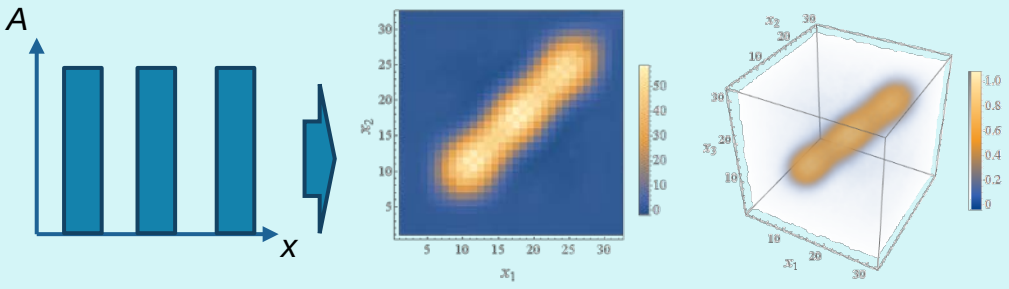
- ***Информационный подход к разрешению***: информация Фишера и «мягкий» предел разрешения.



Проблема определения разрешения. Визуальная различимость

Особенности оценки разрешения в квантовой микроскопии:

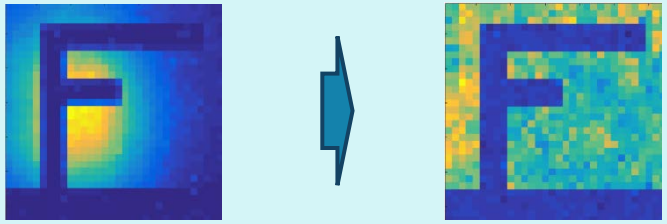
- Проблема интерпретации сигнала: размерность изображения больше, чем у объекта.



$A(x)$ $G^{(2)}(x_1,x_2)$ $G^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$

- Наличие значительных статистических шумов: отношение сигнал-шум быстро убывает с ростом порядка корреляций N.

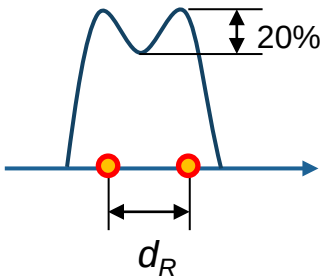
$G^{(1)}$

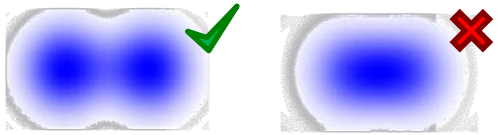


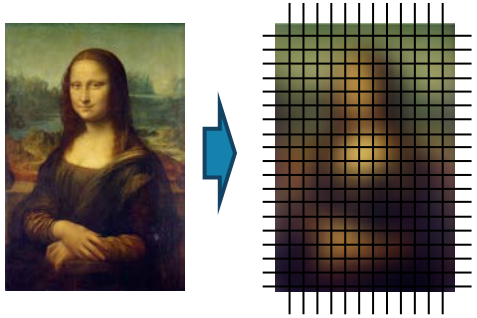
$G^{(2)}$

Визуальная различимость (критерий Рэлея):

- Пара точечных объектов.
- Глубина провала 20%.
- Концепция **различимости** деталей задает естественный масштаб дискретизации изображения.
- Сужение ФРТ в $\sqrt{N}$ раз увеличивает разрешение в $\sqrt{N}$ раз.

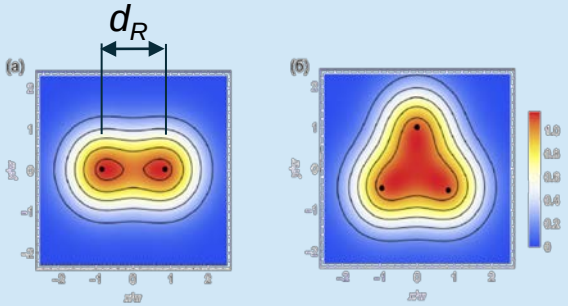






Недостатки подхода:

- Не передает особенности разрешения объектов сложной структуры.
- Не учитывает шумы.
- Не учитывает особенности корреляционных изображений.



Разрешение в фурье-пространстве

Анализ частотно-контрастной характеристики:

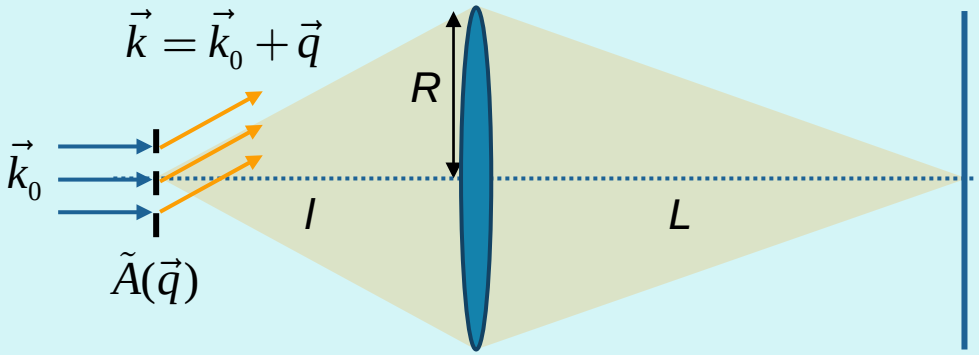
- Описывает передачу **информации** о фурье-компонентах объекта оптической системой.

$$A(\vec{s}) = \int \tilde{A}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{s}} d^2\vec{q} \xrightarrow{|\vec{q}| \le q_{\max}} G^{(N)}(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

- Разрешаемые детали: $d_{\min} \approx \pi / q_{\max}$

- Простой геометрический смысл границы разрешения для когерентного излучения.

$$q_{\max} = q_0 \equiv kR / l$$



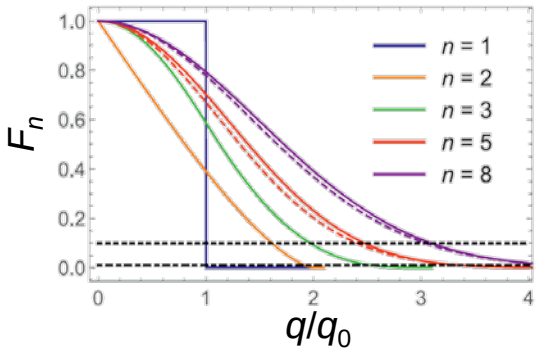
Применение к квантовой микроскопии:

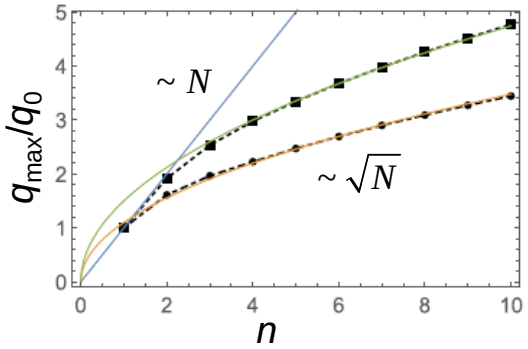
- Вид преобразования для *N*-фотонного перепутанного состояния:

$$G^{(N)}(\vec{r}) \sim \left| \int \tilde{A}_n(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} F_n(|\vec{q}|) d^2\vec{q} \right|^2$$

$$F_n(|\vec{q}|) = \int_{|\vec{q}'| \le q_0} F_{n-1}(|\vec{q} - \vec{q}'|) d^2\vec{q}'$$

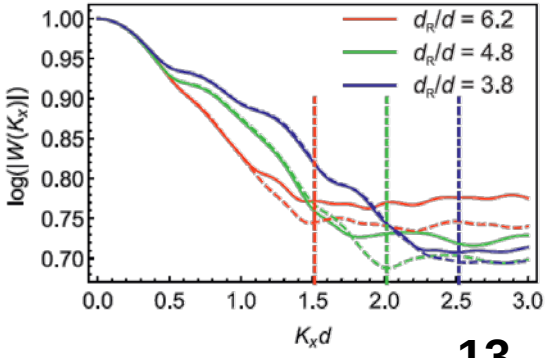
- Позволяет учесть шум.
- Субъективность практической оценки граничного разрешения.





Вывод из рассмотрения:

- Размер потенциально доступной для **реконструкции** области фурье-пространства ~*N*.
- Основной вклад в сигнал вносит область размером ~$\sqrt{N}$.



[K. Rossmann, Radiology 93, 257 (1969)]

Разрешение и информация

Сколько информации содержит изображение?

- Информация для дискретных объектов: минимальное количество бинарных (да-нет) **вопросов**, чтобы узнать, какой объект выбран.

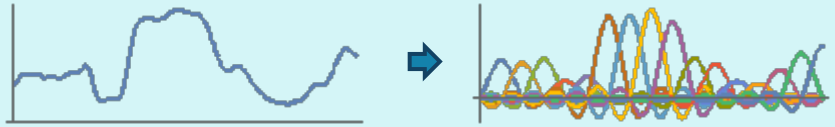
$$H = -\sum p_j \log_2 p_j$$

[C.E. Shannon, Bell Syst. Tech. J. **27**, 379, 623 (1948)]

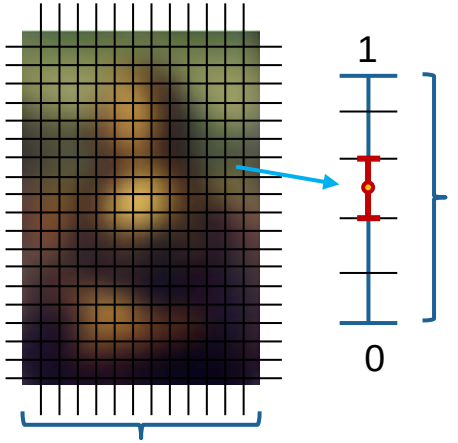
- Информация для непрерывных распределений: неидеальное наблюдение задает конечную **различимость** объектов – возможна дискретизация.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{[2Lq_{\max}]} f\left(n/(2q_{\max})\right) \frac{\sin\left\{\pi\left(2q_{\max}x - n\right)\right\}}{\pi\left(2q_{\max}x - n\right)}$$

[В. А. Котельников, 1933]



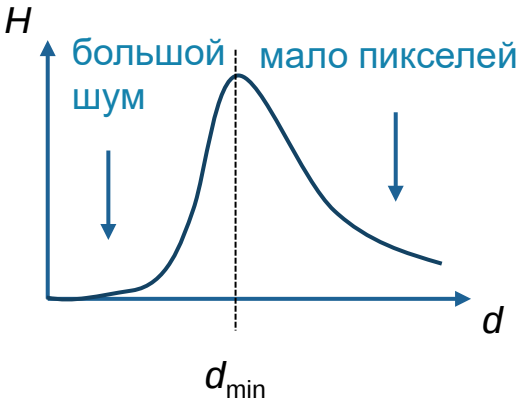
Дискретизация в соответствии с возможностью различения



Дискретизация яркости определяется **погрешностью реконструкции**

Размер пикселя определяется разрешением

$$H \sim N_{\text{пикселей}} \log_2 N_{\text{значений}}$$



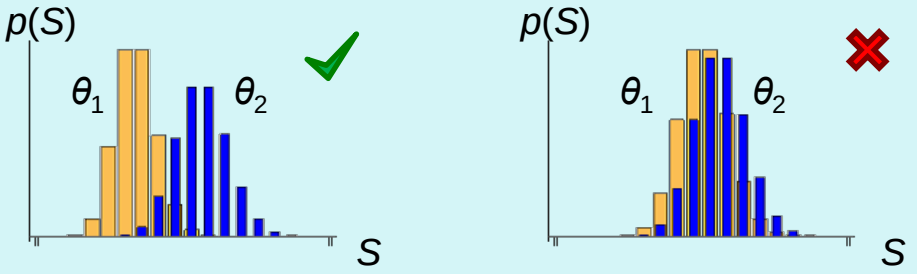
Вывод из рассмотрения:

- Разрешение определяется размером деталей, которые можно **различить с достаточной точностью**.
- Требуется оценка **погрешности реконструкции** объекта в зависимости от размера пикселя *d*.

Информация Фишера

Определение информации Фишера:

- Из-за статистических шумов наблюдаемый сигнал S является случайной величиной.
- Различимость значений θ_1 и θ_2 параметра θ определяется перекрытием распределений вероятности для сигнала.



- Чувствительность сигнала к параметрам: матрица информации Фишера

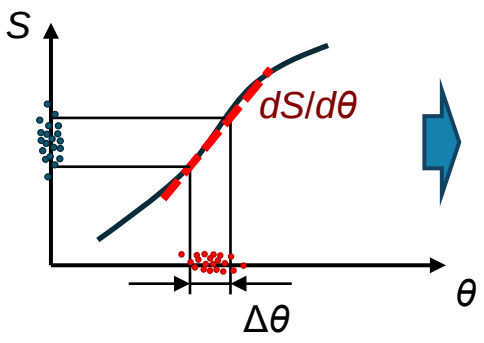
$$F_{\mu\nu} = \sum_S \frac{1}{p(S)} \frac{\partial p(S)}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial p(S)}{\partial \theta_\nu}$$

[R. A. Fisher, Proc. Cambridge Philos. Soc., 22, 700 (1925)]

- Специальный случай распределения Пуассона:

$$F_{\mu\nu} = \sum_k \frac{1}{S_k} \frac{\partial S_k}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial S_k}{\partial \theta_\nu}$$

Оценка погрешности реконструкции параметров:



Неравенство Крамера-Рао

$$\mathrm{Cov}\left(\theta_\mu, \theta_\nu\right) \geq \left(F^{-1}\right)_{\mu\nu}$$

[H. Cramer, Mathematical methods of statistics, 1946; C. R. Rao, Bull. Calcutta Math. Soc., **37**, 81 (1945)]

Информационная мера разрешения:

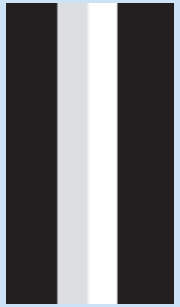
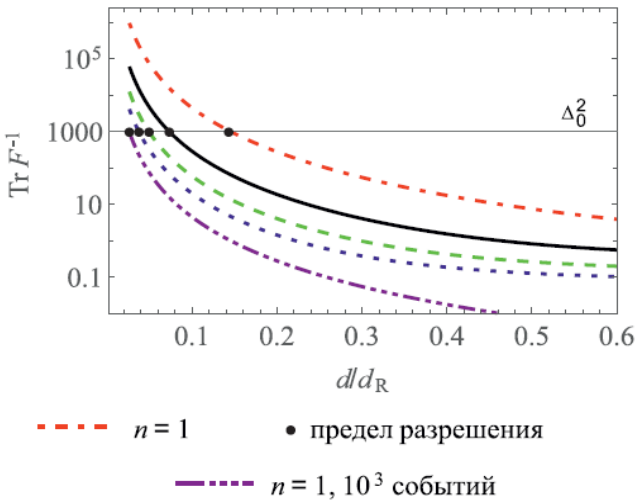
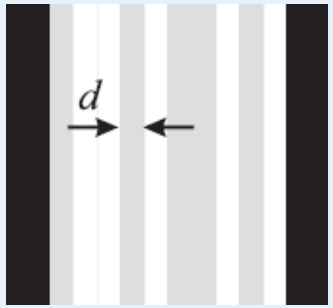
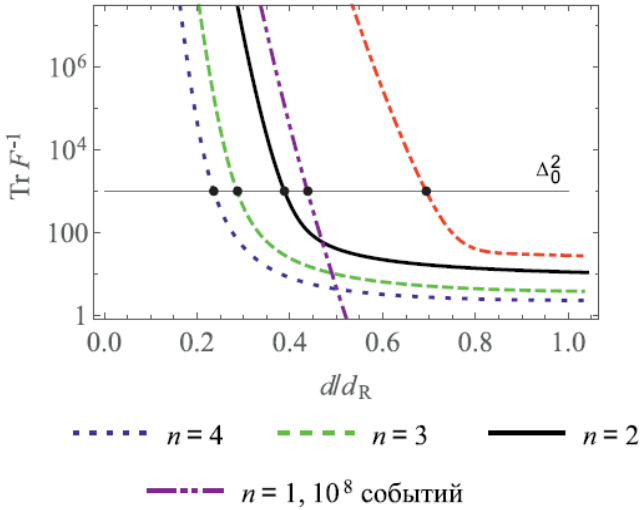
- Удобная скалярная мера качества реконструкции – суммарная дисперсия параметров:

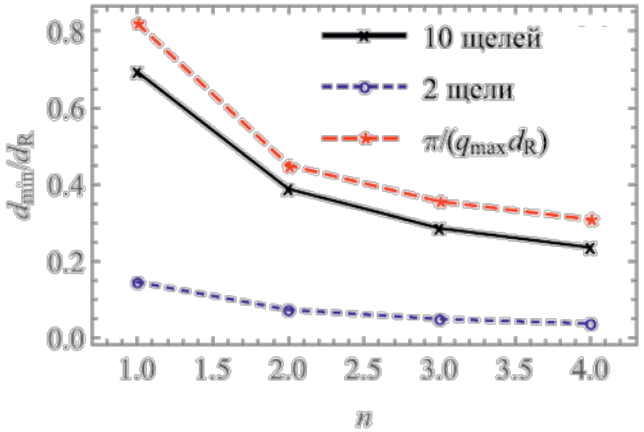
$$\Delta^2 = \sum_\mu \Delta\theta_\mu^2 \geq \mathrm{Tr}\left(F^{-1}\right)$$

- **Разрешение** - минимальный размер деталей объекта $d_{\min}$, для восстановления которых **достаточно информации** в измеренном изображении:

$$d_{\min} = \min\left\{d : \mathrm{Tr}\left(F^{-1}\right) \leq N\varepsilon\right\}$$

Есть ли предел разрешения?

Модель	Анализ	Вывод
2-параметрическая 		• Плавный рост ошибки при уменьшении размера пикселя. • Сверхразрешение даже для когерентного света. • **Разрешение легко увеличивается при увеличении интенсивности!**
10-параметрическая 		• Резкий рост ошибки при уменьшении пикселя – **предел разрешения есть («мягкий»!)**. • Увеличение интенсивности в 10^8 раз влияет на разрешение слабее, чем использование бифотонов – **корреляционные измерения важны**.



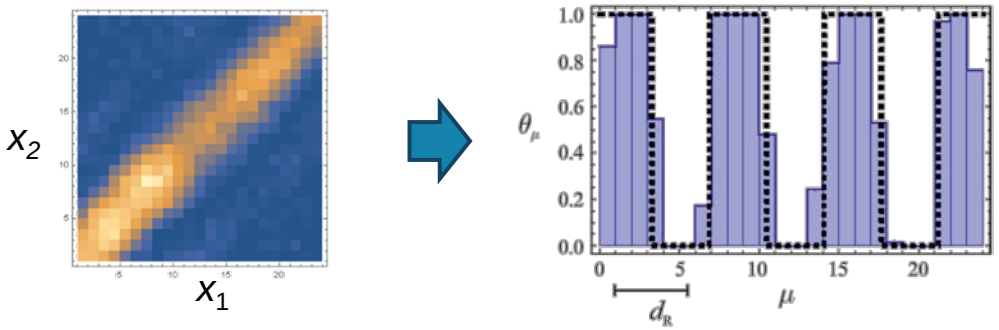
Вывод из рассмотрения:

- 2-параметрическая модель значительно отличается от многопараметрических.
- В изображении есть информация о деталях, меньших классического предела разрешения.

[A. Mikhalychev et al., npj Quant. Inf., **7**, 125 (2021)]

ЧАСТЬ 3. РЕКОНСТРУКЦИЯ ОБЪЕКТА

- ***Алгоритмическая постобработка изображения***: локальность и «оконный» метод.
- ***Преодоление классического предела***: демонстрация сверхразрешения в модельных экспериментах.
- ***Почему экспериментальная ошибка меньше теоретической***: корректный учет априорной информации (ограничений).



Как извлечь информацию? Алгоритмическая постобработка

Восстановление амплитуды пропускания объекта:

- Параметризация в виде пикселей: $A(\vec{s}) = \sum_{\mu} \theta_{\mu} g_{\mu}(\vec{s})$

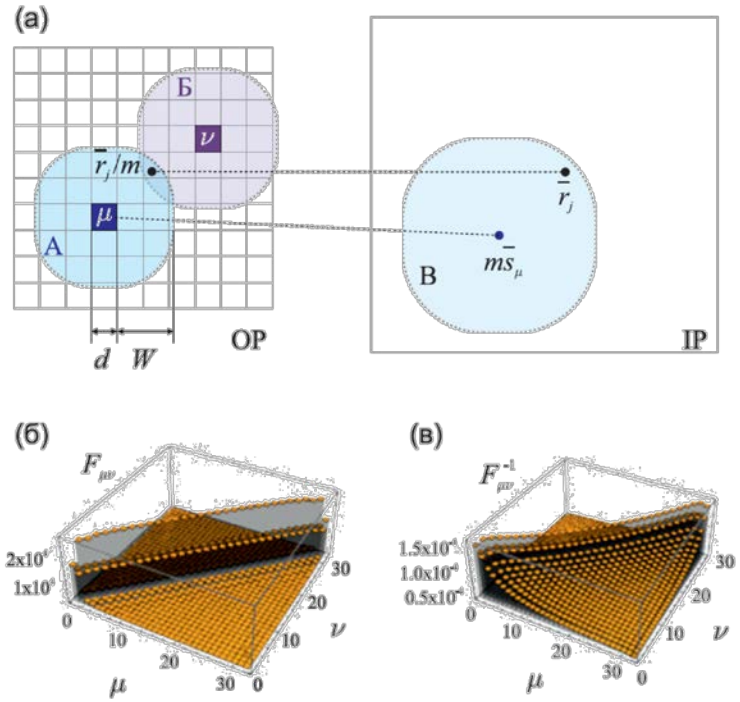
  искомые коэффициенты — базисные функции (пиксели)

- Подгонка параметров теоретической модели:

$$\{\theta_{\mu}\} = \operatorname{argmin}\left\{\operatorname{dist}\left(G^{(n)}_{\text{theor.}} - G^{(n)}_{\text{exp.}}\right)\right\}$$

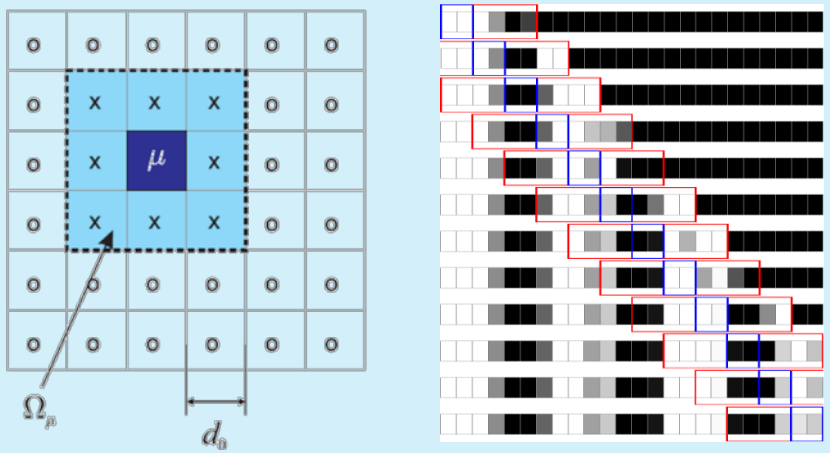
Локальность формирования изображения:

- Каждый пиксель объекта влияет на небольшую локальную часть изображения.
- Приближенно ленточная структура матрицы информации Фишера.
- Погрешности реконструкции далеких пикселей независимы.



Метод «скользящего окна»:

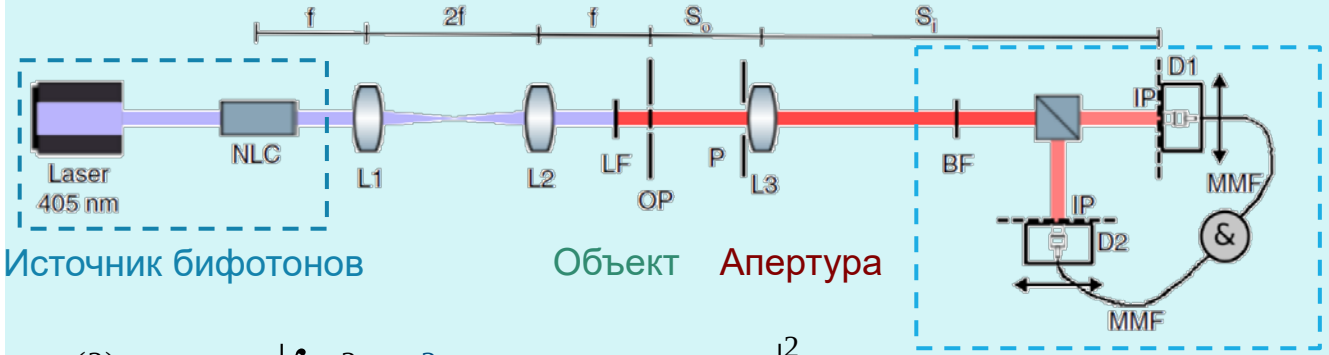
- Многопараметрическая оптимизация сложна.
- Выгодно разделить реконструкцию на подзадачи с малым числом параметров.
- Размер подзадачи определяется структурой матрицы информации Фишера.
- Линейная зависимость времени анализа от размера объекта.



[A. Mikhalychev et al., Comm. Phys., **2**, 134 (2019)]

Модельные эксперименты

Бифотоны на основе СПР (группа А. Стефанова, Бернский университет):

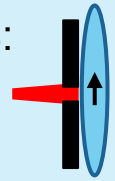


$$G^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) \sim \left|\int d^2\vec{s}\; A^2(\vec{s})\, h(\vec{s},\vec{r}_1)\, h(\vec{s},\vec{r}_2)\right|^2$$

Измерение $G^{(2)}$, сканирующий режим

Контролируемое изменение разрешения:

L3:

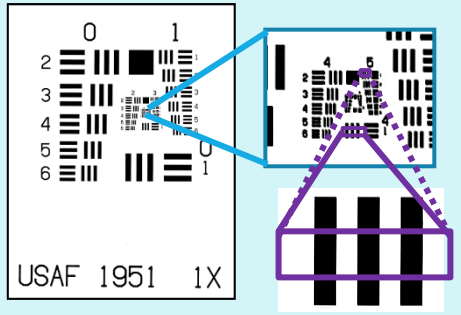


R = 0.3 – 1.7 мм

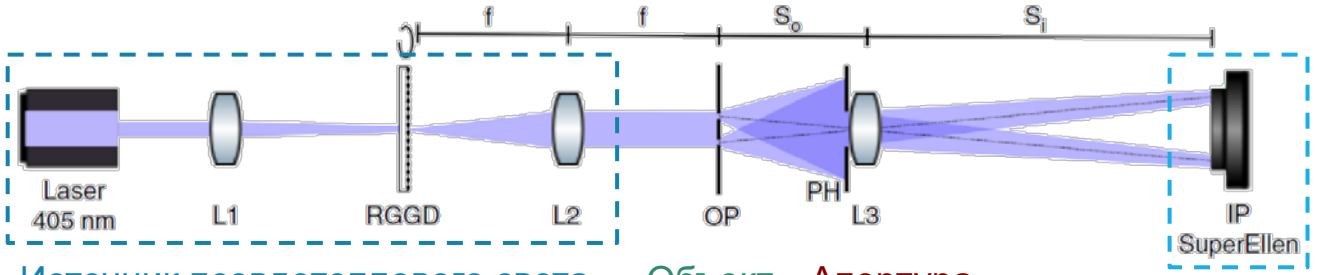
Апертура с изменяемым радиусом

$$d_{\min} \approx \frac{\lambda s_o}{2R}$$

Объекты:



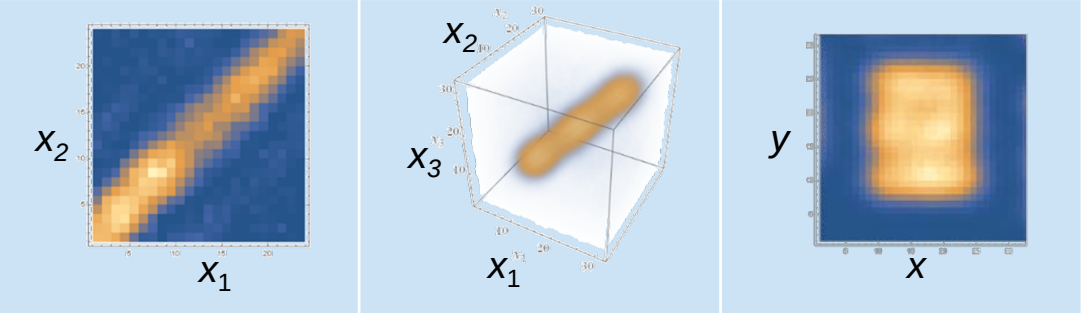
Псевдотепловое излучение на основе вращающегося диска:



Измерение $G^{(N)}$, матричный детектор

$$\Delta G^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = G^{(2)}(\vec{r}_1,\vec{r}_2) - I(\vec{r}_1)\, I(\vec{r}_2) \sim \left|\int d^2\vec{s}\; |A(\vec{s})|^2\, h(\vec{s},\vec{r}_1)\, h^*(\vec{s},\vec{r}_2)\right|^2$$

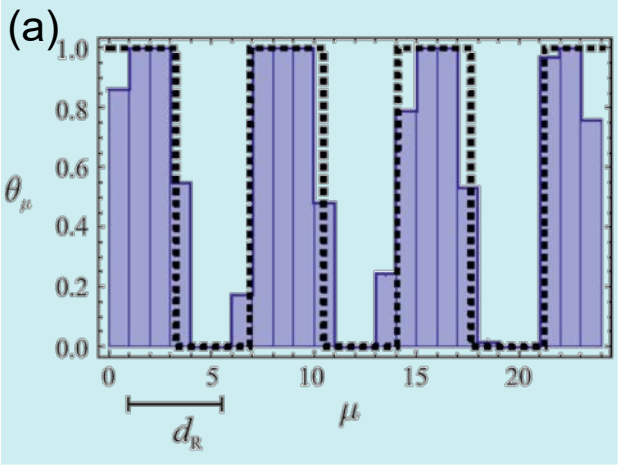
Примеры регистрируемого сигнала:



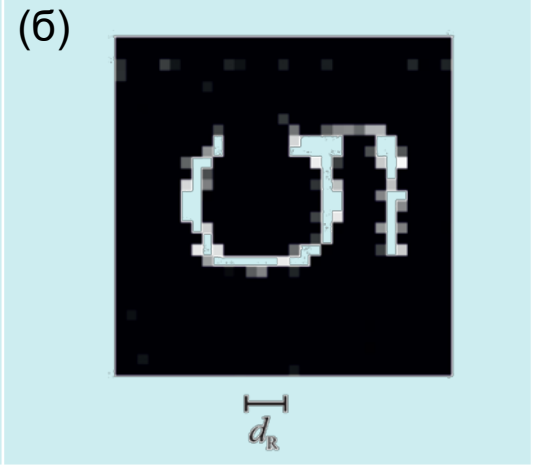
$G^{(2)}(x_1,x_2)$	$\Delta G^{(3)}(x_1,x_2,x_3)$	$\Delta G^{(2)}(x,y;\, x,y)$
бифотоны	псевдотепловое излучение	
1-мерный объект		2-мерный об.

[A. Mikhalychev et al., Comm. Phys., **2**, 134 (2019)]

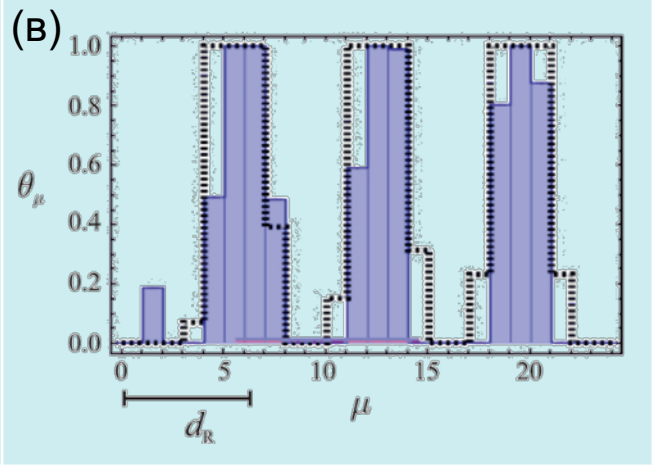
Примеры обработки изображений



Бифотоны (810 нм), $G^{(2)}$,
d_R = 20 мкм, $d_R/(2d)$ = 2.3



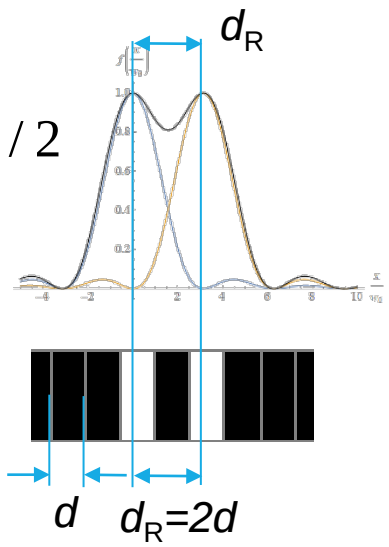
Псевдотепл. (405 нм), $G^{(2)}$,
d_R = 92 мкм, $d_R/(2d)$ = 1.9



Псевдотепл. изл. (405 нм), $G^{(3)}$,
d_R = 140 мкм, $d_R/(2d)$ = 3.2

Предел Рэлея для пикселей:

$$d_{\min} = d_R / 2$$



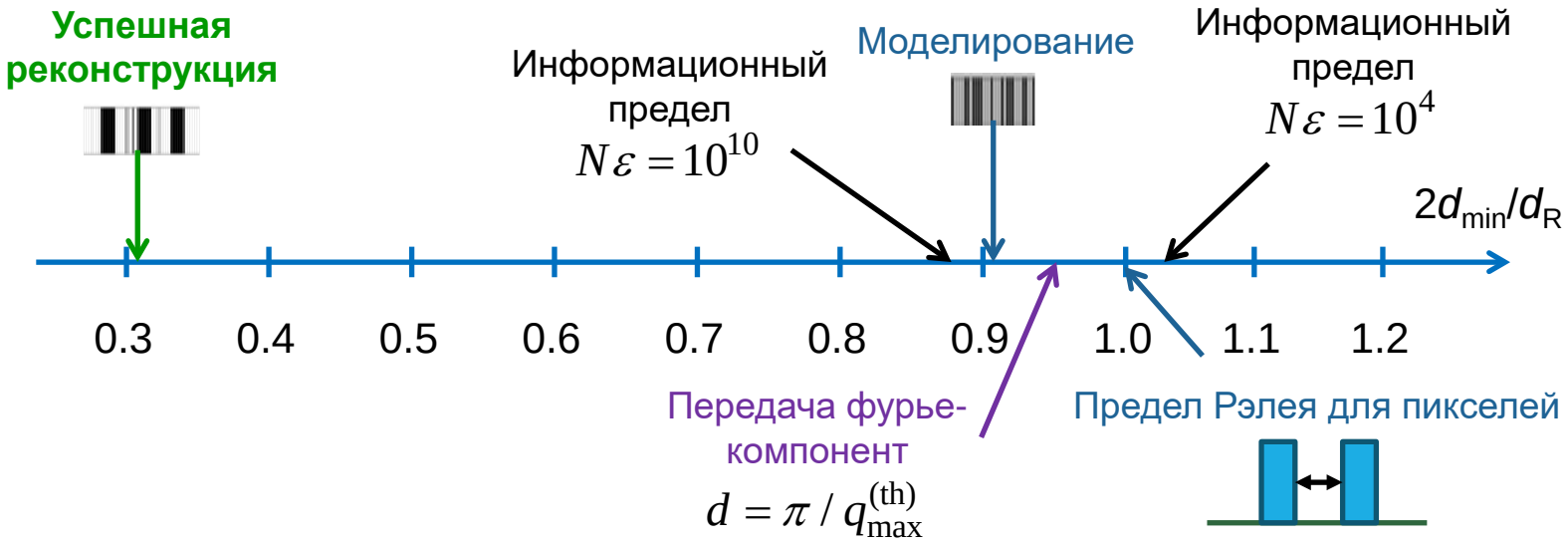
Группа	Излучение	Объект	Сигнал	λ, мкм	d_R, мкм	d, мкм	d_R/d	
1	2	3	4	5	6	7	8	
UBern	Бифотоны	1D	$G^{(2)}$	0.810	12	4.35	2.7	
"	"	"	$G^{(2)}$	0.810	20	4.35	4.6	(а)
"	"	"	$G^{(2)}$	0.810	30	8.51	3.5	
"	Тепловое	1D	$G^{(2)}$, $G^{(3)}$	0.405	1.4×10^2	22.76	6.4	(в)
"	"	2D	$G^{(2)}$	0.405	1.4×10^2	22.76	6.2	
"	"	"	$G^{(3)}$	0.405	92	22.76	3.8	(б)
"	"	"	$G^{(4)}$	0.405	1.1×10^2	22.76	4.8	
CSEM	Бифотоны	1D	$G^{(1)}$, $G^{(2)}$	0.810	0.71	0.63	1.1	

Вывод из рассмотрения:

Квантовая микроскопия с постобработкой изображений позволяет успешно восстановить детали объекта, значительно меньшие классического предела разрешения.

[A. Mikhalychev et al., Comm. Phys., **2**, 134 (2019)]

Можно ли преодолеть теоретическую границу?



Противоречие полученных результатов ожидаемым:

- Достижимое на практике разрешение лучше теоретических предсказаний.
- Реализовавшиеся погрешности меньше **нижней** границы, определяемой на основе информации Фишера.

Объяснение эффекта:

- Реконструкция: учитывается **априорная информация** (ограничение) $0 \le \theta_\mu \le 1$.
- Апостериорное распределение вероятностей у́же функции правдоподобия.
- Информация Фишера: на основе функции правдоподобия; **не учитывает** априорную информацию.
- Смещенная ценка вблизи границы – **не выполняются** условия применимости неравенства Крамера-Рао.

Учет эффекта при расчете погрешностей:

- Модифицированное неравенство Крамера-Рао:

$$\mathrm{Cov}\left(\theta_\mu, \theta_\nu\right) \ge \left(DF^{-1}D^T\right)_{\mu\nu}, \quad D_{\mu\nu} = \partial\bar{\theta}_\mu / \partial\theta_\nu$$

[S.L. Van Trees, 1968; Y.C. Eldar, 2008]

- Эквивалентный подход: модифицированная матрица информации Фишера + исходное неравенство:

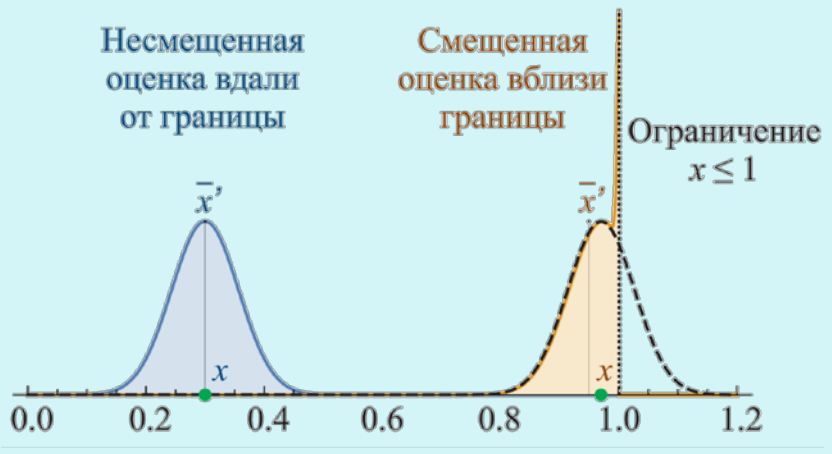
$$\tilde{F} = \left(DF^{-1}D^T\right)^{-1}$$

[A. Mikhalychev et al., Comm. Phys., **2**, 134 (2019)]

Повышение разрешения при наличии ограничений

Одномерный случай:

Возможно двукратное снижение шума.

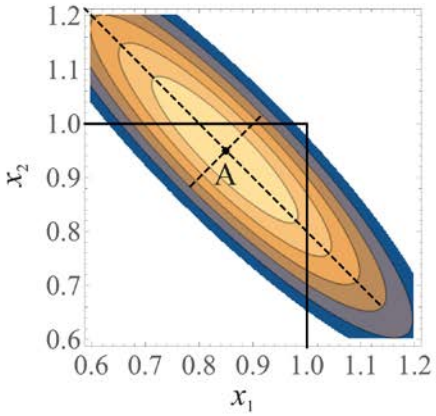


Двумерный случай:

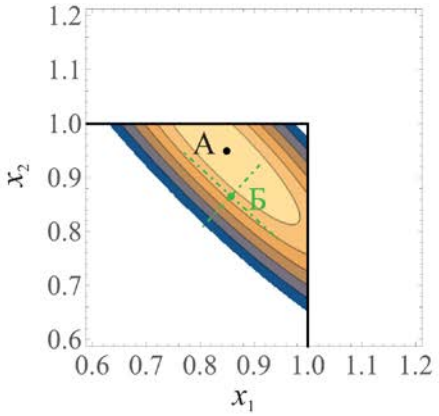
Возможно значительное снижение шума.

Если $x_1 + x_2 \approx 2$ и $x_i \le 1$, то известно, что $x_1 \approx 1$ и $x_2 \approx 1$, даже без знания величины $x_1 - x_2$

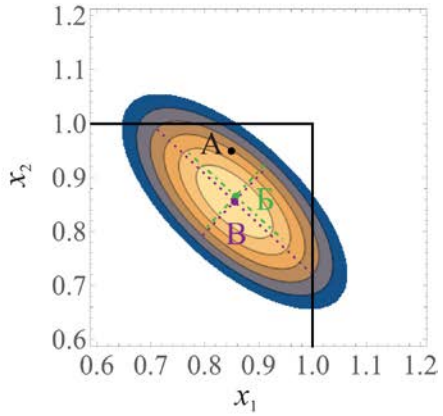
Без учета ограничений



С ограничениями $x_i \le 1$



Модифицированное распред.

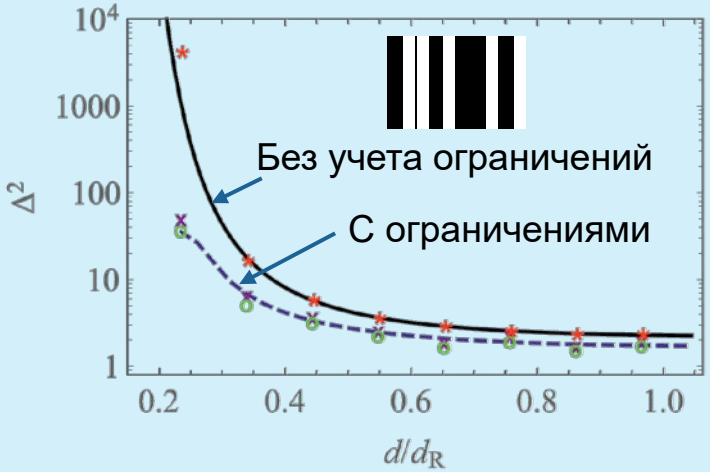


Учет ограничений в матрице информации Фишера:

- Связь матрицы информации Фишера и распределения вероятностей:

$$p\left(\vec{\theta}\right) \propto \exp\left(-\Delta\vec{\theta} \cdot F \Delta\vec{\theta} / 2\right)$$

- Модификация распределения: требуем той же ширины в физической области и малости выхода из нее.
- Модифицированное распределение задает новую (модифицированную) матрицу информации Фишера.



Проверка методом Монте-Карло:

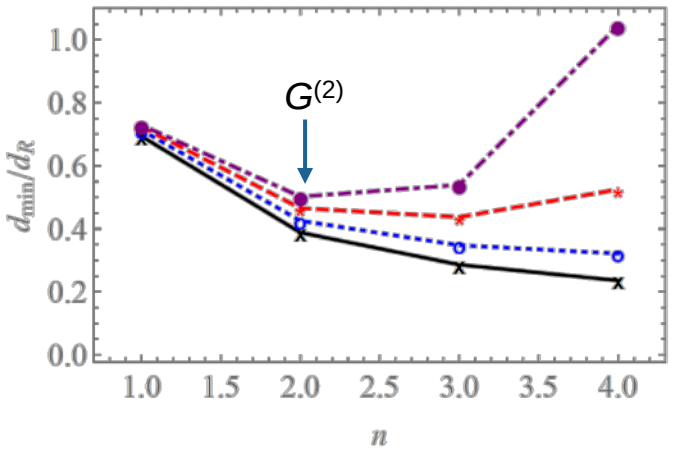
Линии – на основе модифицированной информации Фишера.

Точки – реконструкция модельных данных

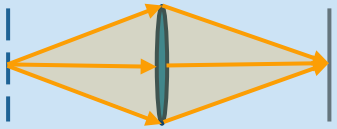
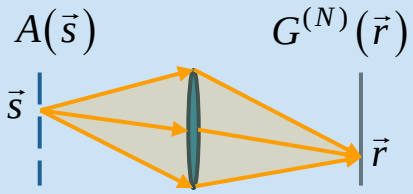
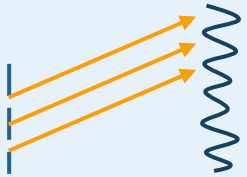
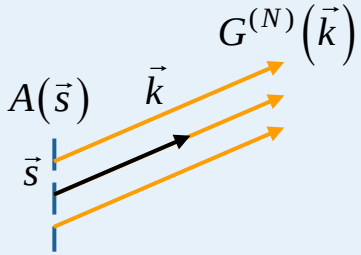
[A. Mikhalychev et al., Phys. Rev. A., **92**, 052106 (2015)]

ЧАСТЬ 4. ОПТИМИЗАЦИЯ КВАНТОВОЙ МИКРОСКОПИИ

- ***Пространственная когерентность***: в каких задачах когерентность важна?
- ***Оптимизация источника излучения***: типы состояний; оптимальность конечной поперечной длины когерентности (корреляции).
- ***Оптимизация детектирования***: парадокс «потерянного» фотона; преобразование излучения для преодоления «проклятия» Рэлея.

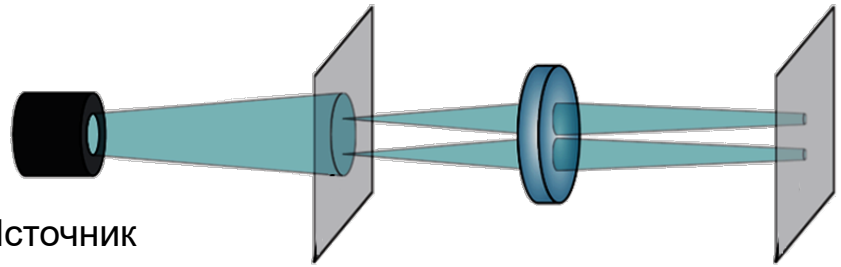


Когда важна квантовая когерентность?

	Классическая микроскопия	Корреляции дискретных переменных	Парадокс ЭПР	Квантовая микроскопия
Не требует когерентности	 Действительное изображение	Один фиксированный базис	Корреляции одного типа наблюдаемых легко объясняются классически	 • Перепутанность не нужна. • Прирост разрешения ~$\sqrt{N}$. • Координатный «выделенный» базис при взаимодействии с объектом и детектором.
Необходима когерентность	 Фурье-образ	Неравенства Белла: измерение в нескольких базисах	Возникает при рассмотрении несовместных наблюдаемых (x и p).	 • Важна перепутанность. • Прирост разрешения ~N. • Координатный базис для объекта, импульсный для детектора. • Интерференционный эффект.

Оптимизация параметров излучения и детектирования

Задачи оптимизации:



Источник излучения **с квантовыми свойствами** | Объект | Оптическая система | Детектирование **корреляций**

Тип состояния:

- когерентное;
- *N* – фотонное перепутанное;
- псевдотепловое;
- классически коррелированное.

Детектирование:

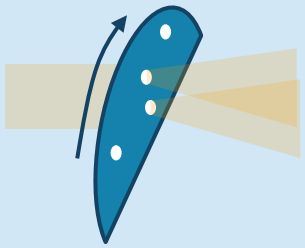
- порядок измеряемых корреляционных функций;
- преобразование поля.

Нормировка информации на:

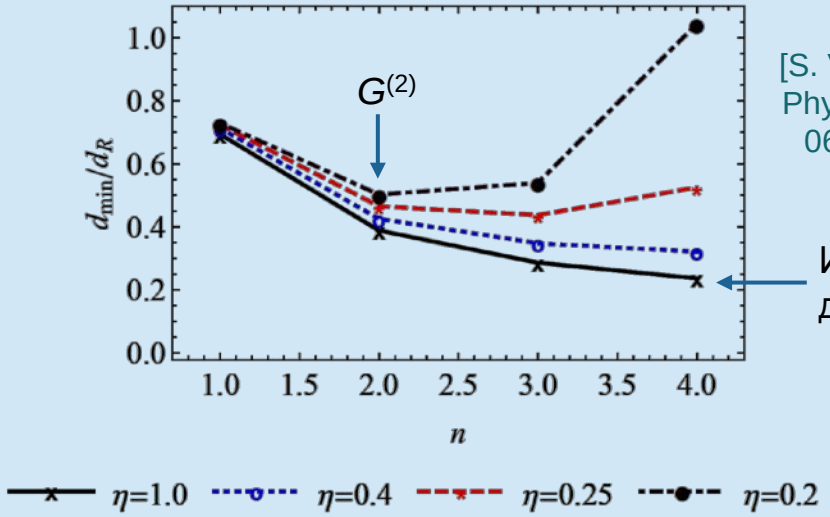
- одно событие детектирования;
- один испущенный импульс.

Параметры состояния: поперечная длина корреляции фотонов (когерентности излучения).

Результаты: тип состояния



- При *N*-фотонном детектировании выгодно использовать классически коррелированное состояние.
- При нормировке на одно событие детектирования выгодно максимальное *N*.
- При нормировке на число испущенных импульсов есть **конечное оптимальное** *N* (для неидеальных детекторов).



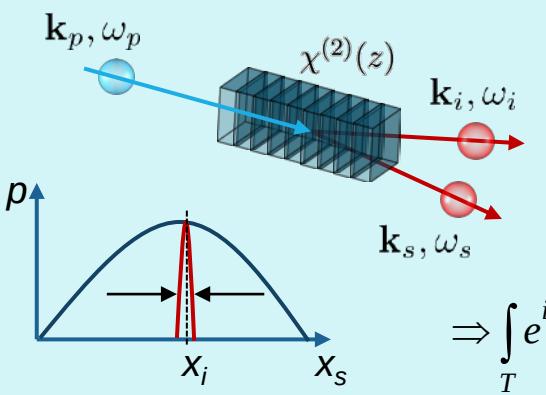
[S. Vlasenko et al., Phys. Rev. A, **102**, 063507 (2020)]

Идеальный детектор

Оптимальны ли максимальные корреляции излучения?

Поперечная длина корреляции (когерентности)

- Для бифотонов на основе СПР:

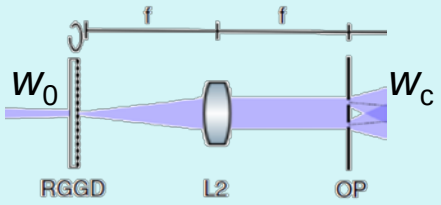


$$H \sim \int dV \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\varepsilon E^2 + \underline{\chi^{(2)} E^3} + \ldots\right)$$

$$E^{(+)}(\vec{r},t) \propto \sum_j e^{i\vec{k}_j\cdot\vec{r} - i\omega_j t} a_j$$

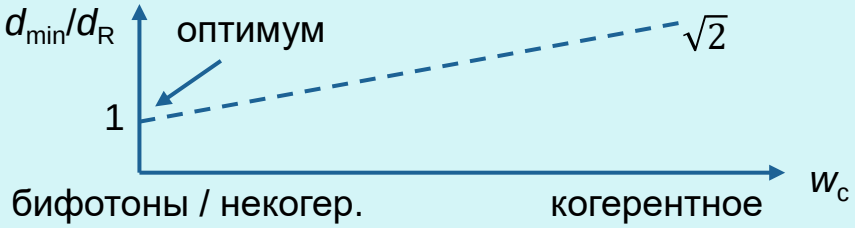
$$\Rightarrow \int_T e^{i(\omega_s+\omega_i-\omega_p)t} dt \int_L e^{i(\vec{k}_p-\vec{k}_s-\vec{k}_i+\Delta\vec{k})\cdot\vec{r}} d^3\vec{r} \times$$
$$\times a_s^+ a_i^+ a_p$$

- Для псевдотеплового света:



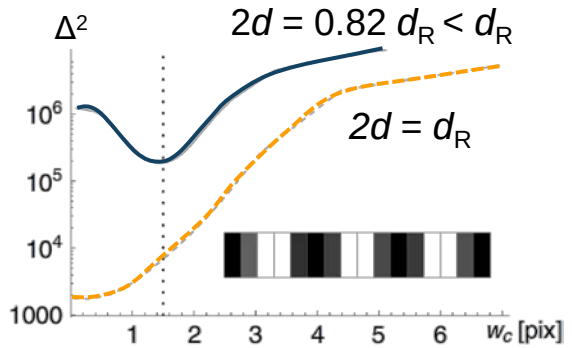
$$w_c = \frac{\lambda f}{2 w_0}$$

- Ожидаемая зависимость разрешения:

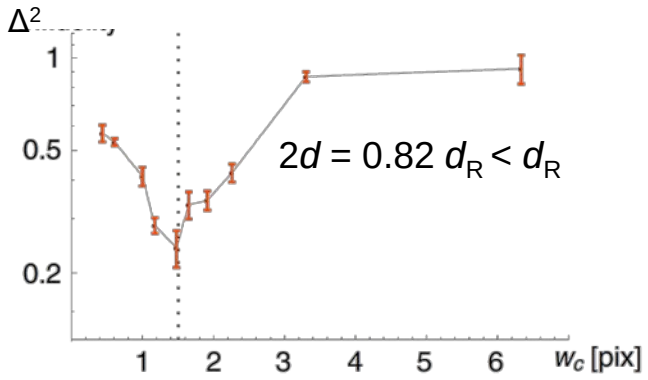


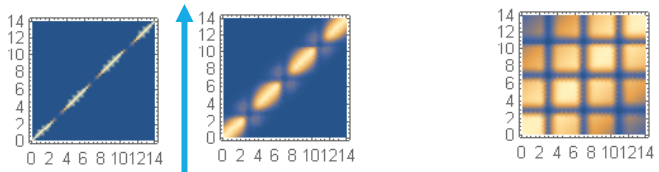
Зависимость суммарной ошибки от поперечной длины когерентности псевдотеплового света:

Предсказание на основе информации Фишера



Реконструкция объекта из экспериментальных данных





[A. Mikhalychev et al., Comm. Phys., **2**, 134 (2019)]

Количество данных

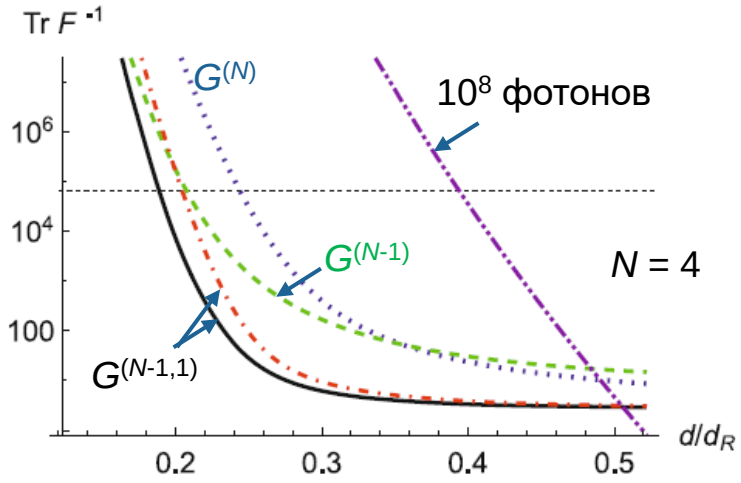
Корреляции фотонов

Вывод из рассмотрения:

- В режиме сверхразрешения существует оптимальная поперечная длина когерентности (порядка 1.5 пикселей).
- Аналогичная зависимость предсказана для бифотонов.

Парадокс «потерянного» фотона

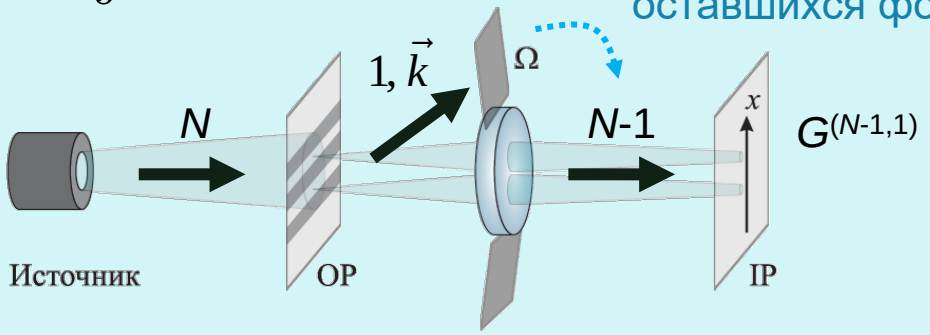
Состояние излучения			Детектируемые корреляции		
детектирование N-фотонных корреляций	N-фотонное перепутанное	$\sqrt{N}$	N-фотонное перепутанное состояние	N-фотонные	$\sqrt{N}$
	классически коррелированное	$\sqrt{2N}$		$(N-1)$-фотонные	$\sqrt{2(N-1)}$
Больше фотонов ⇒ выше разрешение [V. Giovannetti et al., Phys. Rev. A, **79**, 013827 (2009)]			При потере (игнорировании) одного фотона разрешение повышается		



Объяснение – «удаленное управление»:

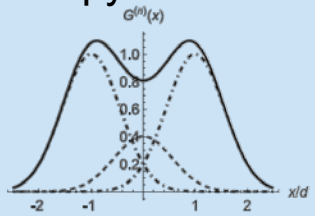
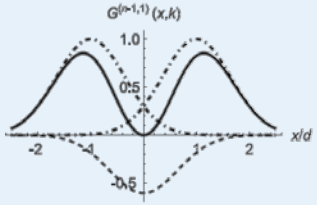
$$|\Psi_N\rangle \propto \int d^2\vec{s}\left(a^+(\vec{s})\right)^N|0\rangle$$

Повышает чувствительность оставшихся фотонов



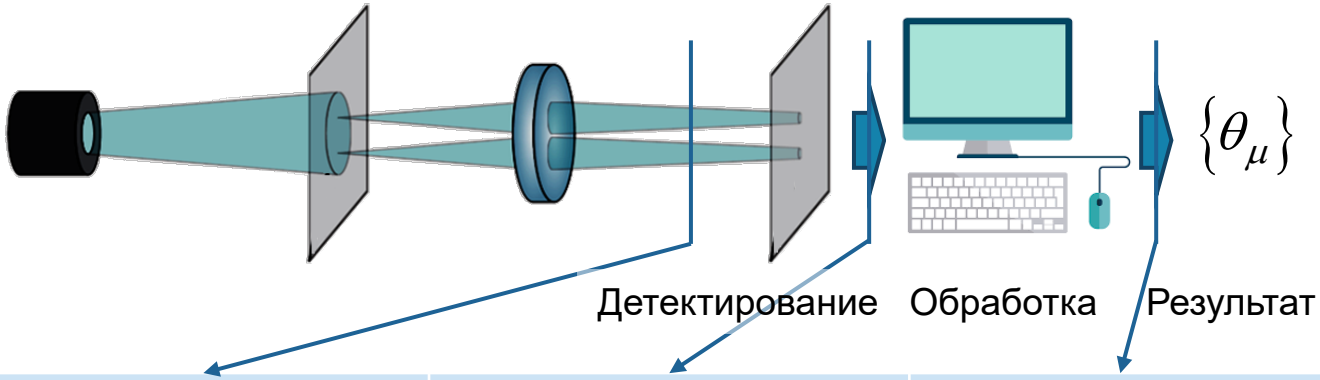
[A. Mikhalychev et al., npj Quant. Inf., **7**, 125 (2021)]

$$\Rightarrow \left|\Psi_{N-1}(\vec{k})\right\rangle \propto \int d^2\vec{s}\, A(\vec{s})\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{s}}\left(a^+(\vec{s})\right)^{N-1}|0\rangle$$

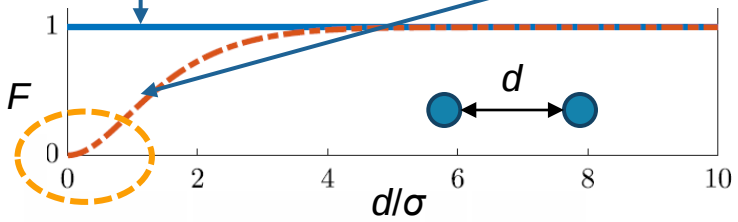
N-ый фотон	Интерференция	$G^{(N)}$	$G^{(N-1)}$	$G^{(N-1,1)}$
Достигает детектора	Конструктивная 	•	•	
Покидает оптическую систему	Деструктивная 		•	•

Преодоление «проклятия» Рэлея

Оценка информативности сигнала (погрешности реконструкции):

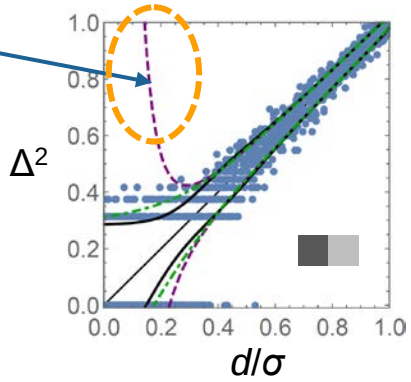


Квантовая информация Фишера	Классическая информация Фишера	Гессиан функции невязки
Информативность состояния (при оптимальном измерении)	Информативность измеренных данных (при оптимальной обработке)	Точность результата



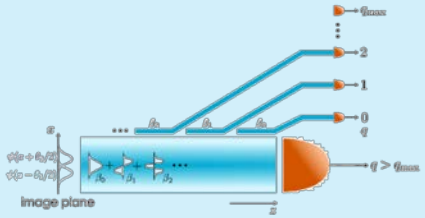
[M.Tsang et al., Phys. Rev. X 6, 031033 (2016)]

«Проклятие» Рэлея

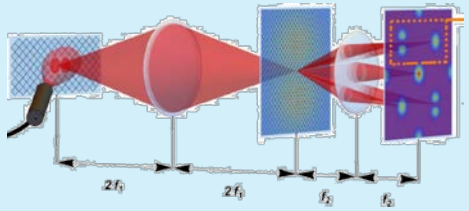


Преобразование поля перед измерением:

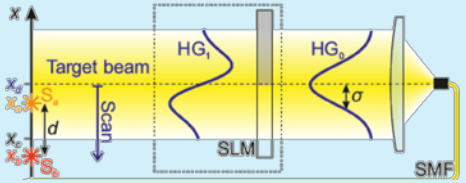
- Классическая и квантовая информация Фишера не совпадают – измерение не оптимально.
- Демультиплексирование / модификация ФРТ – разделение шума и ценного сигнала.



[M.Tsang et al., 2016, 2017]



[M.Paur et al., 2016, 2018]



[K. Katamadze et al., 2021]

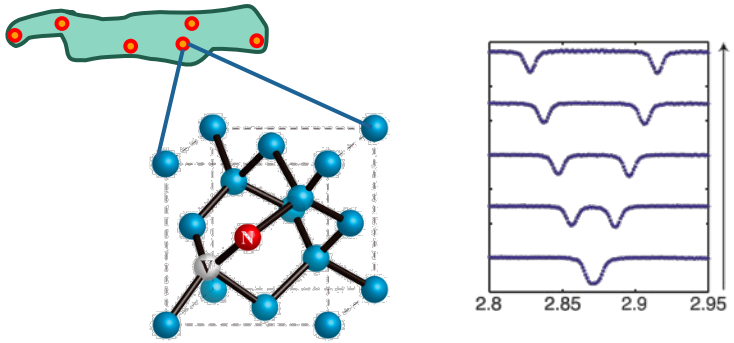
- Усложнение объекта требует усложнения и новой оптимизации измерения.

ЧАСТЬ 5. СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ

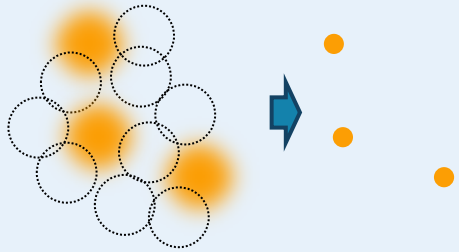
- ***Методы оптического сверхразрешения***: квантовая микроскопия; методы на основе стохастических флуктуаций источников света.

- ***Оптимизация флуктуационной микроскопии (SOFI):*** возможно ли бесконечно большое разрешение?

- ***Объединение микроскопии и метрологии***: сверхразрешение при детектировании температуры и магнитного поля.



Как можно разрешить близкие источники?

Подход	Принцип работы	Механизм	Вычитание	Управление
Квантовая микроскопия	Сужение ФРТ (эффективное уменьшение длины волны)			
Различимость источников (размер кв. точек, допирование наночастиц)	Разделение источников по спектру или другим характеристикам		?	
Статистическое различение источников (SOFI, антигруппировка фотонов) [T. Dertinger et al., 2009; R. Tenne et al., 2019]	Различение сигнала от одиночного источника и перекрестного вклада нескольких источников	$(x+y)^2 \to x^2 + \cancel{2xy} + y^2$ $(x+y)^2 \to \cancel{x^2} + 2xy + \cancel{y^2}$	•	
Последовательное включение источников и их реконструкция (PALM, STORM, PAINT; STED – несколько иной механизм) [S. T. Hess et al., 2006; M. J. Rust et al., 2006; A. Sharonov, 2006; S. W. Hell and J. Wichmann, 2004]	Физическое разбиение одной многопараметрической задачи на много малопараметрических			•

Преимущества квантовой микроскопии:

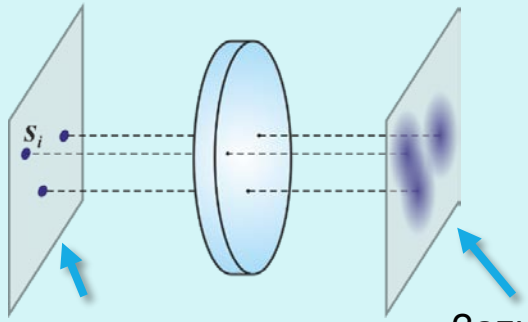
- Нет накопления шума, как при вычитании сигнала.
- Не нужно контролировать состояние отдельных источников (есть однородность по времени).

Преимущества статистических методов:

- Не используем квантовые свойства излучателей для сверхразрешения – можем использовать их для метрологии.

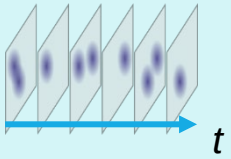
Флуктуационная микроскопия (SOFI): оптимизация обработки

Базовая схема SOFI:



Флуктуирующие флюоресцентные источники

Запись «фильма»



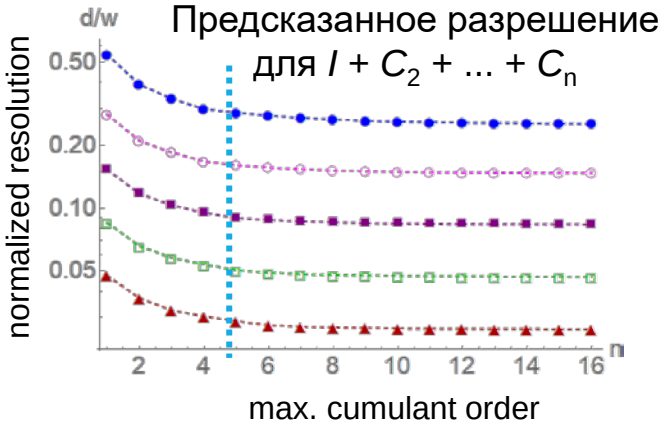
$$C^{(n)}(\vec{r}) = \sum_i \left|h(\vec{r}-\vec{s}_i)\right|^{2n} C_i^{(n)}$$

$C_2 = \langle I^2(t)\rangle - \langle I(t)\rangle^2$ $\quad$ $C_4 = \langle I^4(t)\rangle - \langle I^2(t)\rangle^2 - \ldots - \langle I(t)\rangle^4$

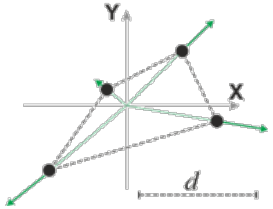
Величина n характеризует постобработку, а не измерение и может быть произвольной ⇒ доступны большие степени $2n$.

[T. Dertinger et al., *PNAS*, **106**, 22287 (2009)]

Оптимизация порядка кумулянтов – простая модель:



Предсказанное разрешение для $I + C_2 + \ldots + C_n$

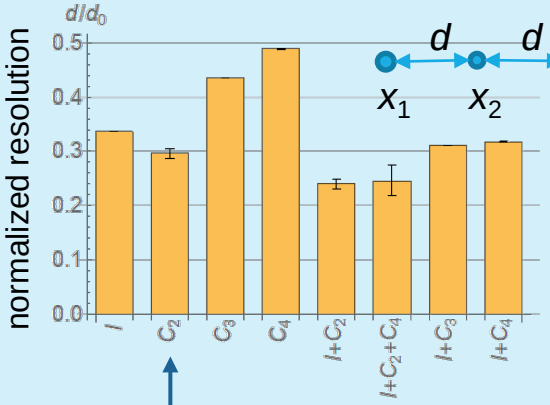


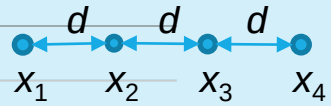
Насыщение: нет прироста информации в следующих кумулянтах при n ≳ 5

- Быстрые флуктуации.
- Не учитываются корреляции сигнала.

[S. Vlasenko et al., *Phys. Rev. A*, **102**, 063507 (2020)]

Учет корреляций и конечного времени накопления:





$$F = GA^{-1}G^T$$

- Реалистичные флуктуации.
- Конечное время накопления.
- Корреляции сигнала.

Расчет кумулянтов источников ➡ Матрица ковариаций шума A ➡ Матрица информации Фишера F

Оптимальный порядок = 2

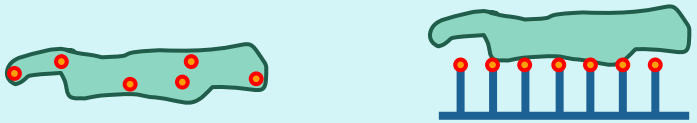
Оптимальная комбинация: $I + C_2$

- Для пары источников: [S. Kurdzialek and R. Demkowicz-Dobrzanski, J. Opt. **23**, 075701 (2021)]
- Общий случай: [A. Mikhalychev et al., готовим публикацию]

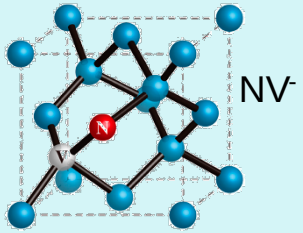
Сверхразрешающая термо- и магнитометрия

Квантовые сенсоры:

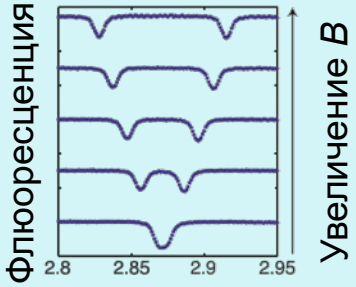
- Задача: **одновременное** измерение параметров биологического микрообъекта во многих точках.



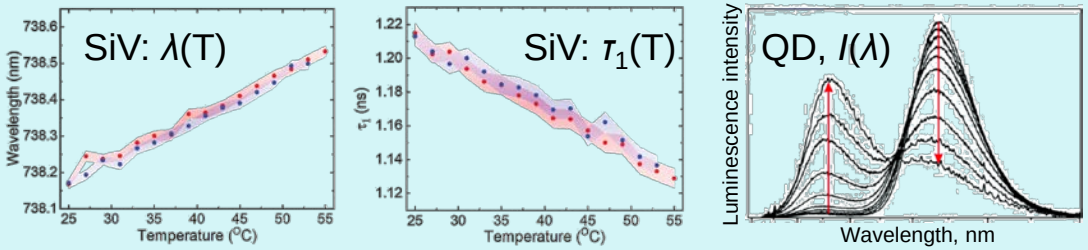
- Измерение магнитного поля:



[J.M. Taylor et al., 2008; G.Balasubramanian, 2008]



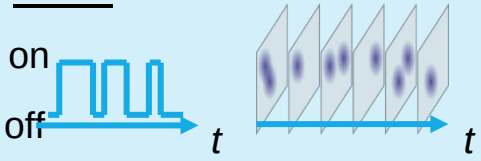
- Измерение температуры:



[G. Kucsko et al., 2013; L. Golubeva et al., 2022; P. Jorge et al., 2007]

Объединение со сверхразрешением:

- SOFI



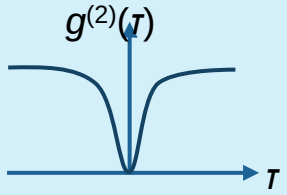
$$I_i^n(x) \approx [I_i^{(0)}]^n [\xi(x) + \delta(x)\Delta Y]$$

$$S_n(\vec{r},x) \approx -\xi(x)\sum_i \left[I_i^{(0)}\right]^n \left|h(\vec{r}-\vec{r}_i)\right|^{2n} C_i^{(n)} + \delta(x)\sum_i \left[I_i^{(0)}\right]^n \Delta T_i \left|h(\vec{r}-\vec{r}_i)\right|^{2n} C_i^{(n)}$$

Y – измеряемый параметр (T, B, ...),

x – переменная сканирования (v, λ, τ).

- Антигруппировка



$$p_i^2(x) \approx [p_i^{(0)}]^2 [\xi(x) + \delta(x)\Delta Y]$$

$$\Delta G^{(2)}(\vec{r},x) = G^{(2)}(\vec{r},x) - I^2(\vec{r},x) \approx$$

$$\approx -\xi(x)\sum_i \left[p_i^{(0)}\right]^2 \left|h(\vec{r}-\vec{r}_i)\right|^4 -$$

$$-\delta(x)\sum_i \left[p_i^{(0)}\right]^2 \Delta T_i \left|h(\vec{r}-\vec{r}_i)\right|^4$$

- При последовательном включении флюоресцирующих источников (PALM, STORM, PAINT) их анализ проводится независимо.

Заключение

- Формирование изображение определяется конструктивной и деструктивной интерференцией излучения.
- Детектирование *N*-фотонных корреляций эффективно сужает функцию рассеяния точки оптической системы.
- Состояние излучения, освещающего объект, должно предоставлять необходимые корреляции фотонов (но не обязательно квантовые).
- Разрешение можно определить как размер деталей, которые можно различить с достаточной точностью.
- Масштабирование разрешения с *N* зависит от задачи (геометрии измерения, типа объекта, требуемой точности).
- Есть значительное различие между разрешением пары источников и реконструкцией сложного изображения.
- Анализ структуры информации Фишера позволяет обоснованно разделить задачу реконструкции на независимые части.
- Учет априорной информации (физических ограничений) позволяет повысить разрешение до нескольких раз.
- Не всегда состояние с наибольшей корреляцией фотонов обеспечивает наилучшее разрешение.
- Отказ от регистрации одного из фотонов может повысить разрешение (из-за отказа от постселекции менее информативных результатов детектирования с конструктивной интерференцией).
- Возможно объединение сверхразрешающей микроскопии с метрологией.

Спасибо за внимание!

Михалычев Александр Борисович

Центр квантовой оптики и квантовой информатики

Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

a.mikhalychev@ifanbel.bas-net.by, mikhalychev@gmail.com