Khosta, Sochi, Russia October 2–8, 2022

5th International School on Quantum Technologies

QUANTUM CLUSTER STATES AND ONE-WAY COMPUTING: EXPECTATION AND REALITY

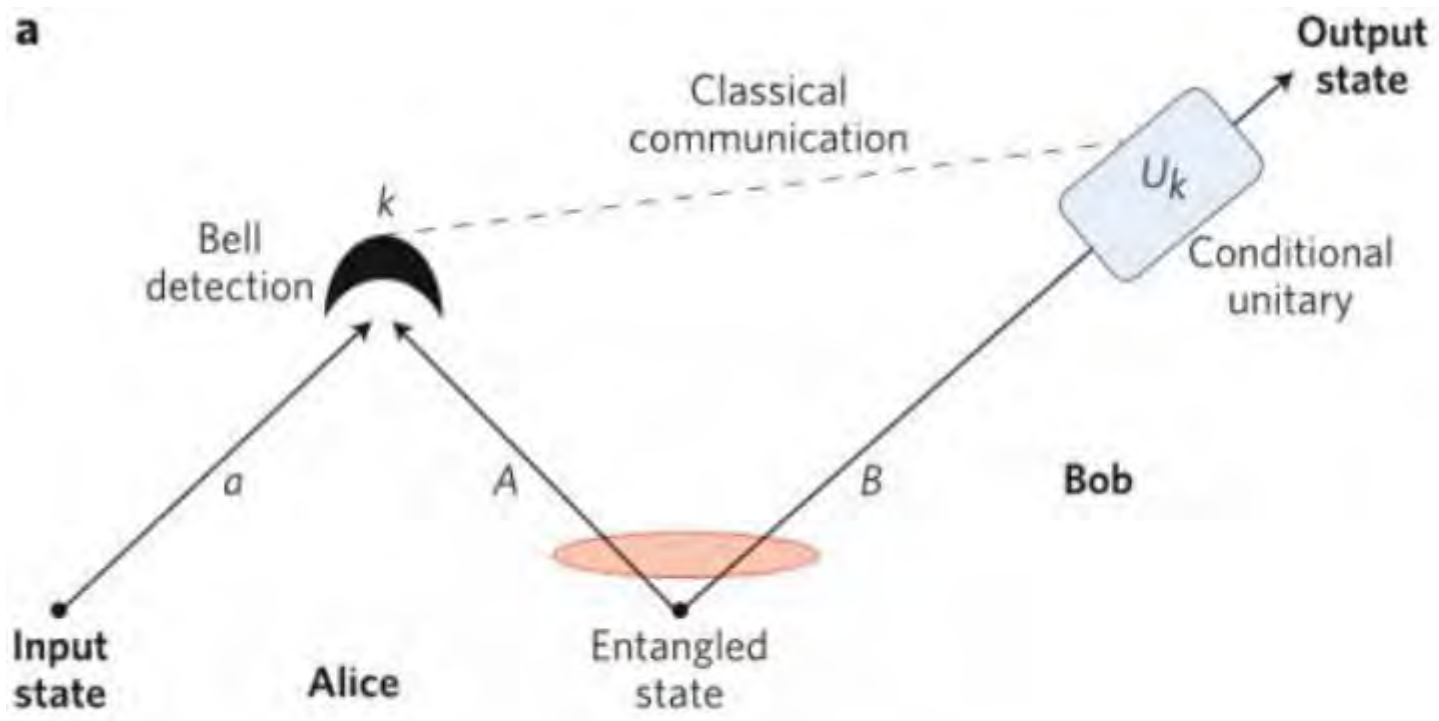
Golubeva T. Yu. St.Petersburg State University

ПЛАН

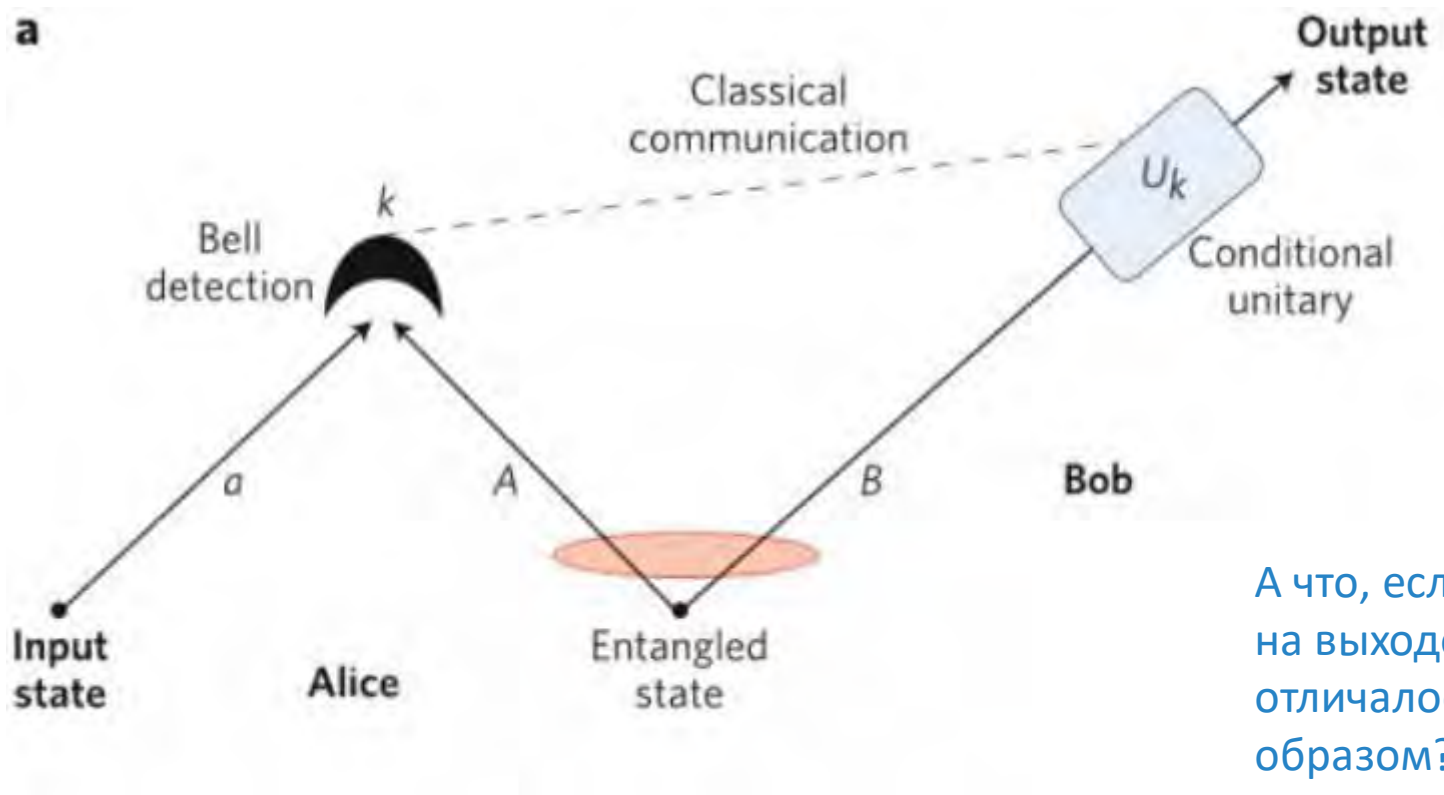
1. Введение
2. Принцип однонаправленных вычислений. Телепортация.
3. Непрерывные переменные (напоминание о квантовании поля). Телепортация в непрерывных переменных.
4. Кластерное состояние в непрерывных переменных. То же в дискретных.
5. Набор операций, необходимый для универсальных вычислений в дискретных переменных. То же в непрерывных.
6. Физические системы, на которых реализуют вычисления, сложности. Современный прогресс.

схемная модель – аналог вычислений на классическом компьютере
однонаправленные вычисления – нет классического аналога, в основе лежит телепортация
кластерное состояние – ресурс для проведения вычислений
обсуждение в дискретных и непрерывных переменных

ПРИНЦИП ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ

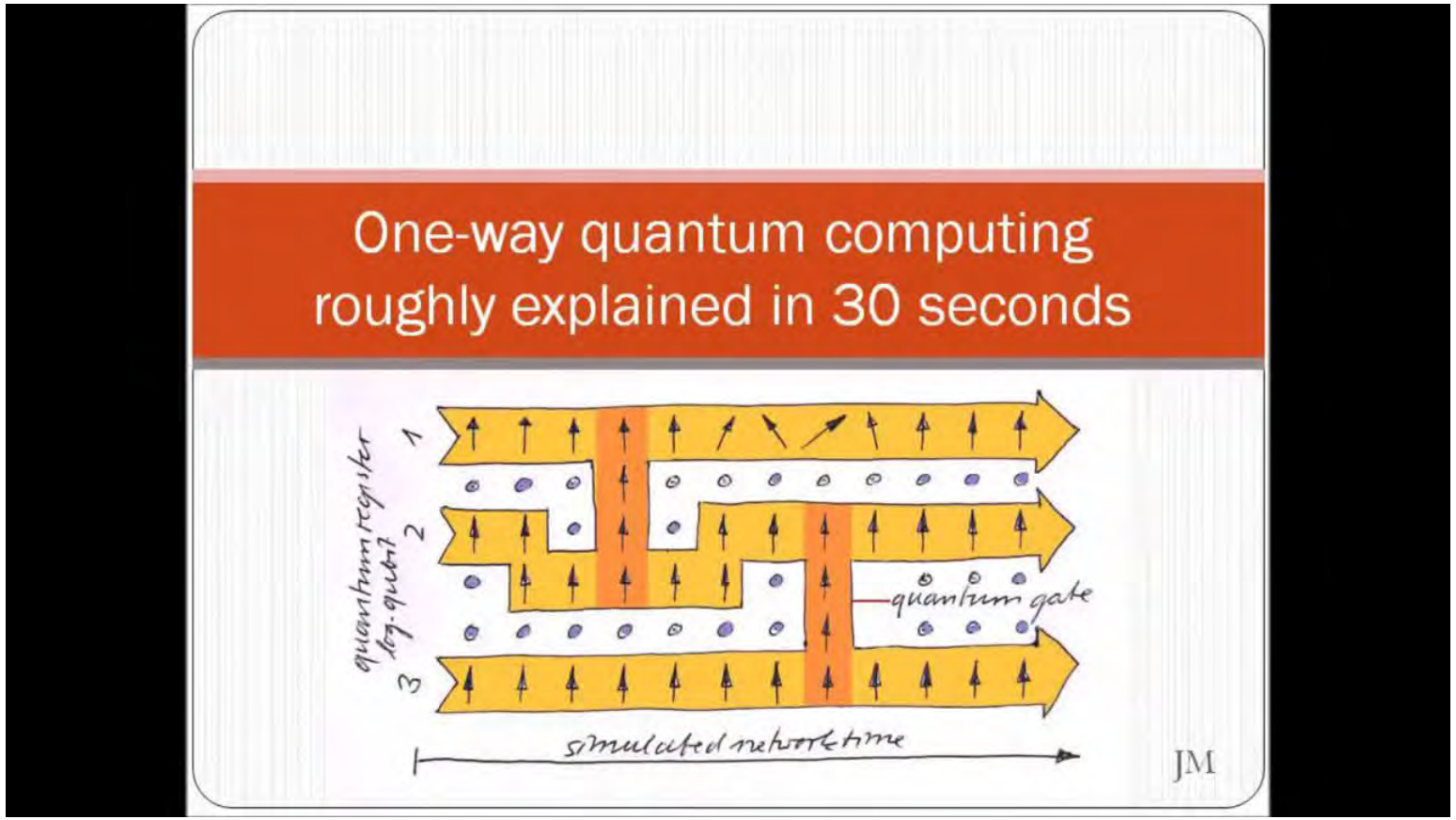


ПРИНЦИП ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ. ТЕЛЕПОРТАЦИЯ



А что, если мы хотим, чтобы состояние на выходе не совпало с исходным, а отличалось от него каким-то заданным образом?

ПРИНЦИП ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ



Josep M. Fargas

Ресурс – одноразовый, он расходуется при измерении

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (НАПОМИНАНИЕ О КВАНТОВАНИИ ПОЛЯ)

Solutions of Maxwell's Equations

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \vec{e}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + c.c.$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}}}{\mu_0 \omega_{\vec{k}}} a_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + c.c.$$

Energy of the electromagnetic field

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r \left(\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r},t) + \mu_0 \vec{H}^2(\vec{r},t) \right)$$

НЕПРЕРЫВНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ (НАПОМИНАНИЕ О КВАНТОВАНИИ ПОЛЯ)

Quantum electomagnetic field

$$\hat{\vec{E}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \vec{e}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + h.c.$$

$$\hat{\vec{H}}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} i \left(\frac{\hbar\omega_{\vec{k}}}{2\varepsilon_0 V} \right)^{1/2} \frac{\vec{k} \times \vec{e}_{\vec{k}}}{\mu_0 \omega_{\vec{k}}} \hat{a}_{\vec{k}} e^{-i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{r}} + h.c.$$

where $\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}'}\right] = \delta_{\vec{k},\vec{k}'}$, and the energy is equal to

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \left(\frac{\hat{p}^2_{\vec{k}}}{2} + \frac{\omega^2_{\vec{k}} \hat{q}^2_{\vec{k}}}{2} \right) = \sum_{\vec{k}} \hbar\omega_{\vec{k}} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right)$$

$\hat{a} = \hat{x} + i\hat{y}$ - запись через квадратурные компоненты

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

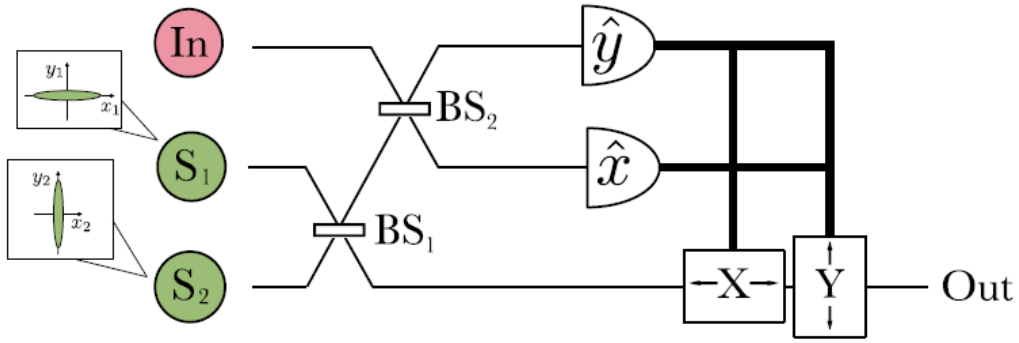
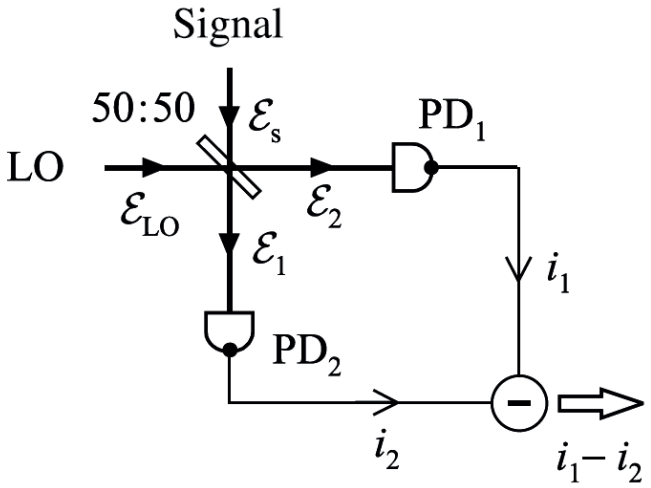


Схема телепортации в непрерывных переменных

Схема балансного гомодинного детектора



На входе:

$$\hat{x}_{s,1} = e^{r}\hat{x}_{0,1}, \qquad \hat{y}_{s,1} = e^{-r}\hat{y}_{0,1}$$

$$\hat{x}_{s,2} = e^{-r}\hat{x}_{0,2}, \qquad \hat{y}_{s,2} = e^{r}\hat{y}_{0,2},$$

После смешения на первом светоделителе:

$$\hat{a}_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}\right) + i\left(\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}\right)\right),$$

$$\hat{a}_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\hat{x}_{s,1} - \hat{x}_{s,2}\right) + i\left(\hat{y}_{s,1} - \hat{y}_{s,2}\right)\right).$$

После смешения на втором светоделителе:

$$\hat{a}_{in}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\hat{x}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}\right)\right) + i\left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}\right)\right)\right),$$

$$\hat{a}_1'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}\right)\right) + i\left(\hat{y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}\right)\right)\right).$$

Гомодинное детектирование:

$$\begin{cases} \hat{i}_{in,y} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta\left(\hat{y}_{in} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}\right)\right) \\ \hat{i}_{1,x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\beta\left(\hat{x}_{in} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_{s,1} + \hat{x}_{s,2}\right)\right) \end{cases}$$

ТЕЛЕПОРТАЦИЯ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

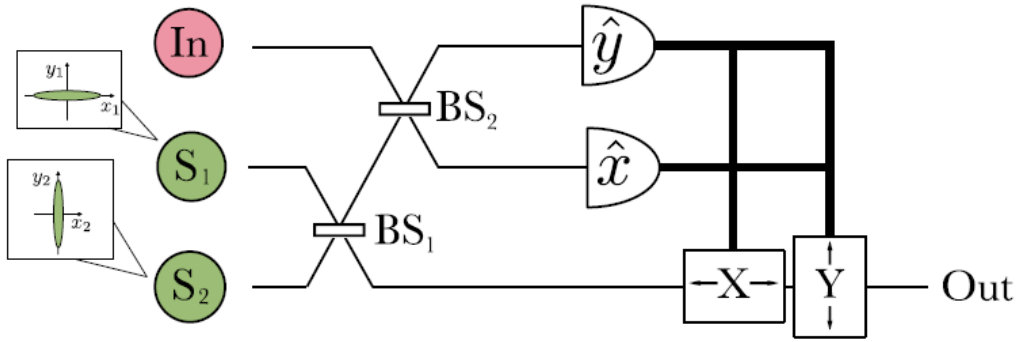


Схема телепортации в непрерывных переменных

Изменение квадратурных компонент поля во втором канале:

$$\hat{x}_2' = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} - \sqrt{2}i_{1,x}/\beta,$$

$$\hat{y}_2' = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} - \sqrt{2}i_{in,y}/\beta.$$

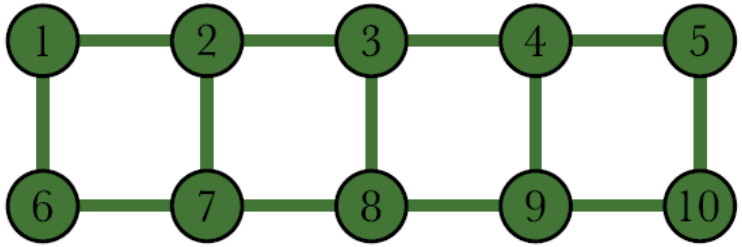
На выходе:

$$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}\hat{x}_{s,2} = \hat{x}_{in} - \sqrt{2}e^{-r}\hat{x}_{0,2},$$

$$\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}\hat{y}_{s,1} = \hat{y}_{in} + \sqrt{2}e^{-r}\hat{y}_{0,1},$$

КЛАСТЕРНОЕ СОСТОЯНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Выберем граф состояния, которое хотим построить (т.е. совокупность узлов и связей)



$$G = (V, E)$$

2. В качестве узлов выберем состояния бесконечно сжатые по y-квадратуре

The state $|0\rangle_y$ is infinitely squeezed in $\hat{y}$-quadrature, since it has the following variances

$$_y\langle 0|\delta\hat{y}^2|0\rangle_y = 0 \qquad _y\langle 0|\delta\hat{x}^2|0\rangle_y = \infty$$

3. Перепутаем нужные узлы, применяя операцию CZ

$$\hat{C}_{Z,ij} = e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}$$

g_{ij} - весовые коэффициенты.

КЛАСТЕРНОЕ СОСТОЯНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Найдем действие оператора CZ на квадратуры:

$$\hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{y}_i\hat{C}_{Z,ij} = e^{-2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}\,\hat{y}_i\,e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}$$

Применим разложение: $$e^{-\alpha\hat{A}}\hat{B}e^{\alpha\hat{A}} = \hat{B} - \alpha[\hat{A},\hat{B}] + \frac{\alpha^2}{2}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \ldots$$

Тогда

$$\hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{y}_i\hat{C}_{Z,ij} = \hat{y}_i - 2ig_{ij}[\hat{x}_i\hat{x}_j,\hat{y}_i] + \frac{(2ig_{ij})^2}{2}[\hat{x}_i\hat{x}_j,[\hat{x}_i\hat{x}_j,\hat{y}_i]] + \ldots$$

Подставляя значение коммутатора квадратур, $[\hat{x},\hat{y}] = \frac{i}{2}$, получим:

$$[\hat{x}_i\hat{x}_j,\hat{y}_i] = \hat{x}_i\hat{x}_j\hat{y}_i - \hat{y}_i\hat{x}_i\hat{x}_j = [\hat{x}_i,\hat{y}_i]\hat{x}_j = \frac{i}{2}\hat{x}_j,$$

$$[\hat{x}_i\hat{x}_j,[\hat{x}_i\hat{x}_j,\hat{y}_i]] = \frac{i}{2}[\hat{x}_i\hat{x}_j,\hat{x}_j] = 0,$$

$\ldots$ - остальные коммутаторы равны 0

КЛАСТЕРНОЕ СОСТОЯНИЕ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В результате:

$$\hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{y}_i\hat{C}_{Z,ij} = \hat{y}_i + g_{ij}\hat{x}_j \qquad \hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{x}_i\hat{C}_{Z,ij} = \hat{x}_i$$

$$\hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{y}_j\hat{C}_{Z,ij} = \hat{y}_j + g_{ij}\hat{x}_i \qquad \hat{C}^{\dagger}_{Z,ij}\hat{x}_j\hat{C}_{Z,ij} = \hat{x}_j$$

Тогда, чтобы сгенерировать кластерное состояние, описываемое каким-то графом G нам нужно действовать следующим образом:

1. Ассоциируем с каждым узлом графа квантовый осциллятор в сжатом состоянии.
2. К каждой паре осцилляторов с номерами i и j мы применяем перепутывание оператором CZ.

$$|G\rangle = \hat{C}_{Z,total}|0\rangle_y^{\otimes n} \equiv \left(\prod_{(i,j)\in E} e^{2ig_{ij}\hat{x}_i\hat{x}_j}\right)|0\rangle_{y,1}|0\rangle_{y,2}\cdots|0\rangle_{y,n}$$

КЛАСТЕРНОЕ СОСТОЯНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. В качестве исходных состояний выбираем состояния

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

2. Перепутываем пары кубитов операцией

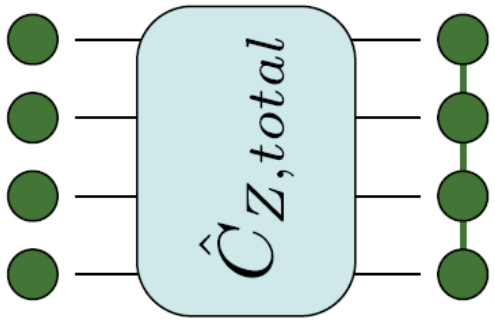
$$\mathrm{cPhase}_{ij} = |0\rangle_i\langle 0| \otimes \hat{I}_j + |1\rangle_i\langle 1| \otimes \hat{Z}_j$$

В результате получаем кластерное состояние:

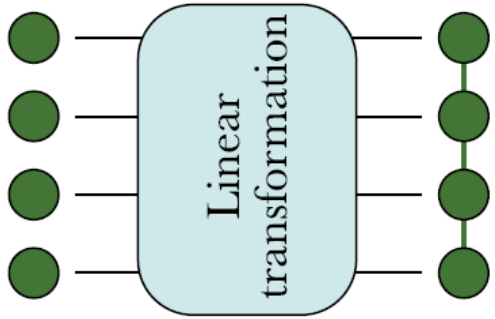
$$|G\rangle = \prod_{(i,j)\in E} \mathrm{cPhase}_{i,j} |+\rangle_i^{\otimes n}$$

ГЕНЕРАЦИЯ КЛАСТЕРНОГО СОСТОЯНИЯ

Теория

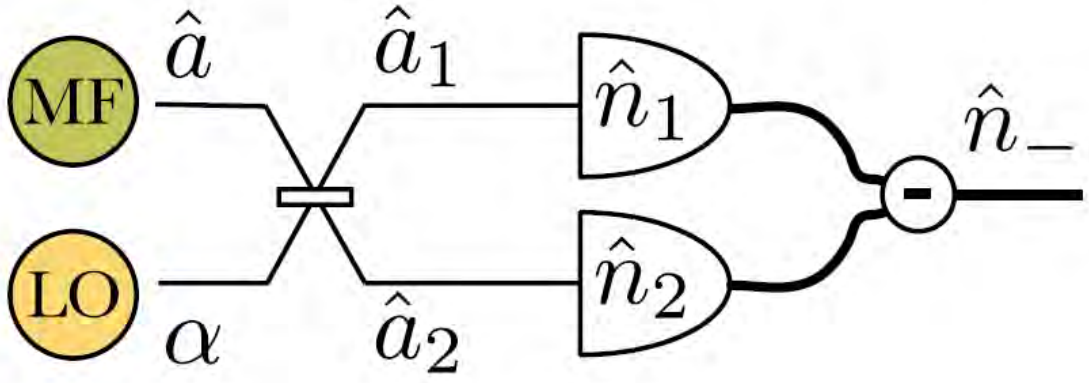


Практика



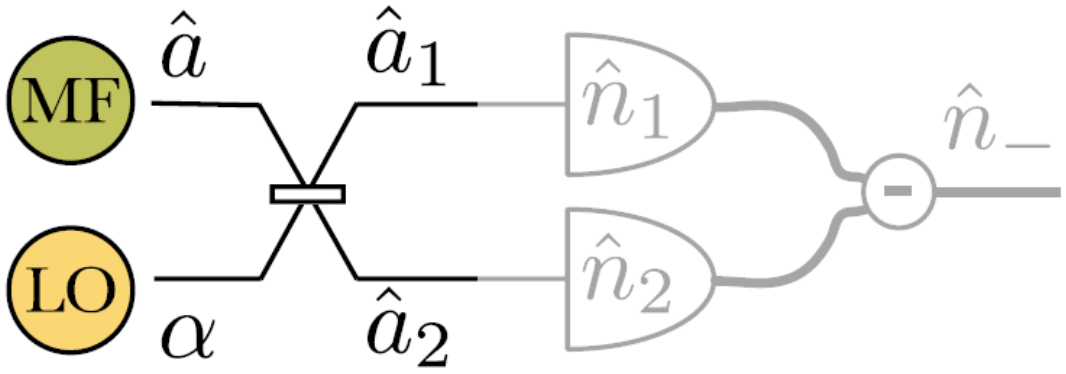
Нуллифайеры, стабилизаторы ….

ГОМОДИННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ



Here MF — Measurable field, LO — local oscillator

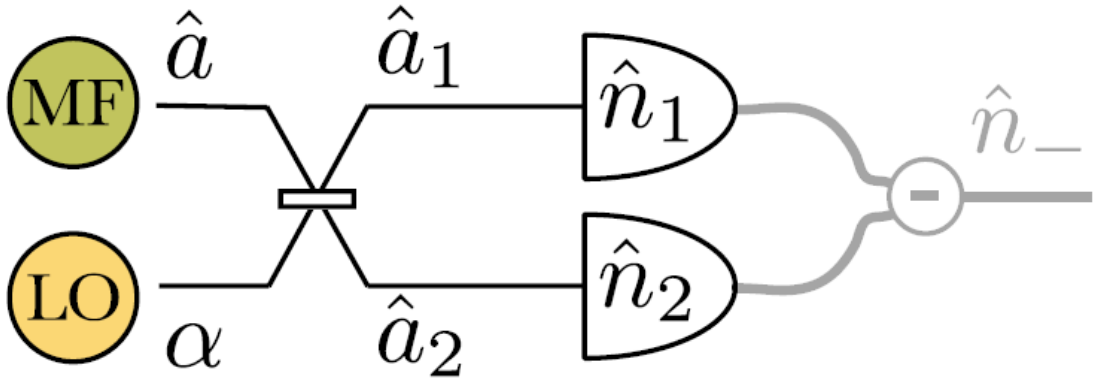
ГОМОДИННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ



Операторы амплитуд поля после светоделителя:

$$\hat{a}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} + \alpha\right) \qquad \hat{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{a} - \alpha\right)$$

ГОМОДИННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ

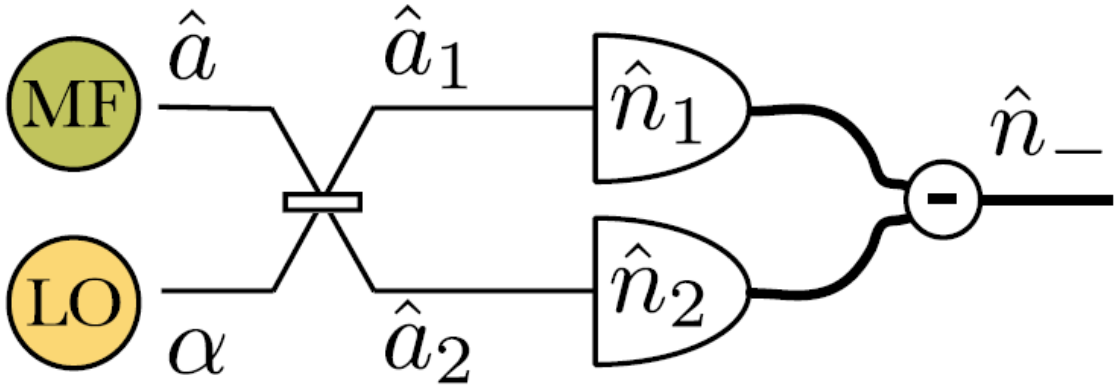


Операторы числа частиц измеряемых полей:

$$\hat{n}_1 = \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 = 1/2\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \alpha \hat{a}^\dagger + \alpha^* \hat{a} + |\alpha|^2\right)$$

$$\hat{n}_2 = \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 = 1/2\left(\hat{a}^\dagger \hat{a} - \alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a} + |\alpha|^2\right)$$

ГОМОДИННОЕ ИЗМЕРЕНИЕ



Разностный фототок:

$$\hat{n}_- = \hat{n}_1 - \hat{n}_2 = 2|\alpha|\left(\cos\theta\hat{X} + \sin\theta\hat{Y}\right)$$

- в зависимости от фазы гомодина можем измерять одну или другую квадратуры квантового поля, или их комбинацию

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В дискретных переменных:

1. Произвольное однокубитное преобразование
2. Перепутывающее двухкубитное преобразование

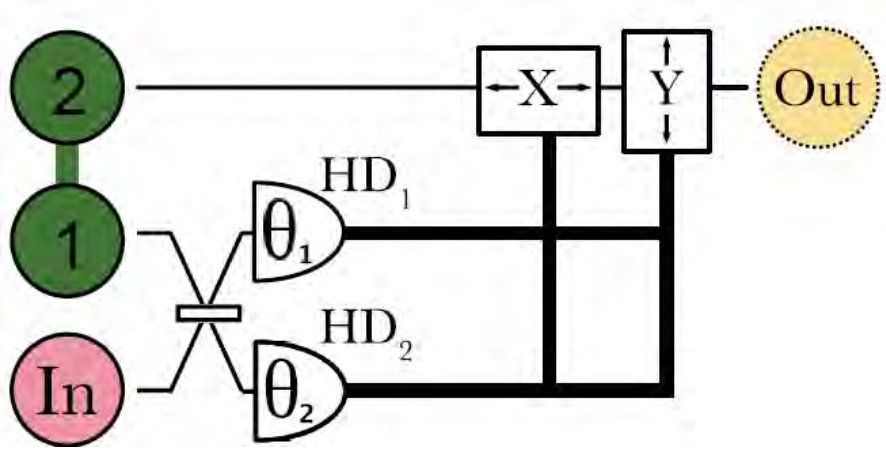
В непрерывных переменных:

1. Произвольное одномодовое преобразование (гауссово)
2. Перепутывающее двухмодовое преобразование (гауссово)
3. Негауссова операция

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Произвольная одномодовая гауссова операция

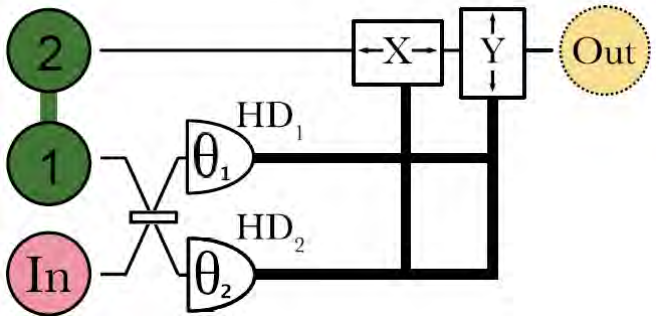
1. Попробуем выполнить нужную операцию на минимально возможном ресурсе – двухузловом кластере.
2. Получим кластерное состояние (линейными преобразованиями)



Связь квадратур сжатых осцилляторов с квадратурами кластера:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_1 + i\hat{Y}_1 \\ \hat{X}_2 + i\hat{Y}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+g^2}} \begin{pmatrix} \hat{x}_{s,1} - g\hat{y}_{s,2} + i\left(g\hat{x}_{s,2} + \hat{y}_{s,1}\right) \\ \hat{x}_{s,2} - g\hat{y}_{s,1} + i\left(g\hat{x}_{s,1} + \hat{y}_{s,2}\right) \end{pmatrix}$$

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Произвольная одномодовая гауссова операция

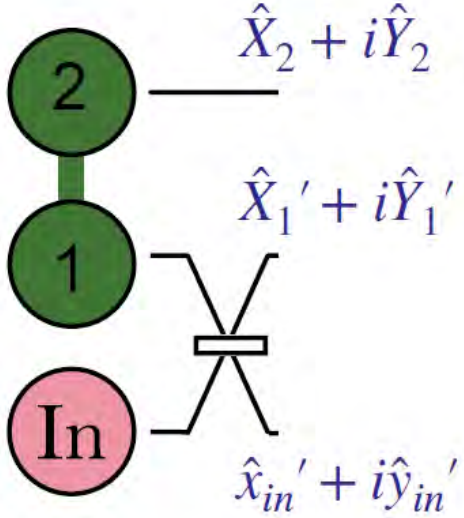
3. Примешаем входное состояние к первому узлу кластера:

$$\hat{X}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_{in} + \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(\hat{x}_{s,1} - g\hat{y}_{s,2}\right)\right)$$

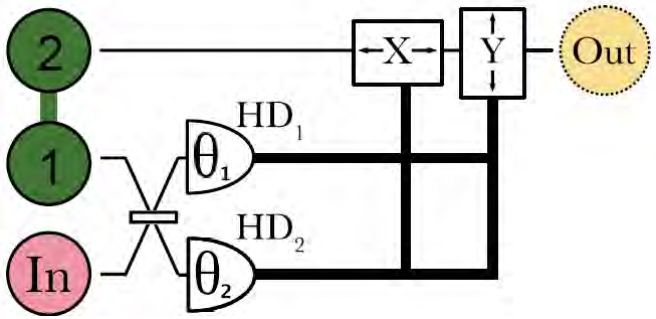
$$\hat{Y}_1{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y}_{in} + \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(g\hat{x}_{s,2} + \hat{y}_{s,1}\right)\right)$$

$$\hat{x}_{in}{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{x}_{in} - \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(\hat{x}_{s,1} - g\hat{y}_{s,2}\right)\right)$$

$$\hat{y}_{in}{}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{y}_{in} - \frac{1}{\sqrt{1+g^2}}\left(g\hat{x}_{s,2} + \hat{y}_{s,1}\right)\right)$$



НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Произвольная одномодовая гауссова операция

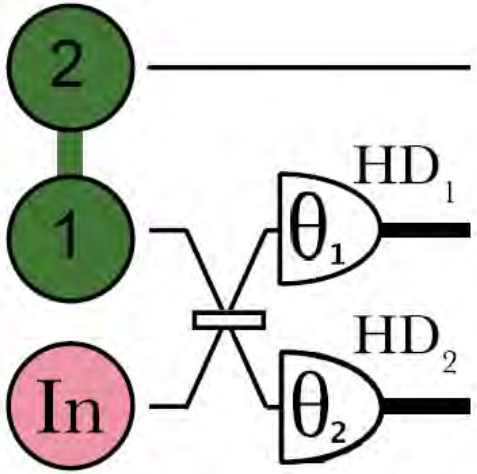
4. Измеряем фототоки в канале In и в канале 1:

$$\begin{cases} \hat{i}_1 = \cos\theta_1 \hat{X}_1{}' + \sin\theta_1 \hat{Y}_1{}' \\ \hat{i}_2 = \cos\theta_2 \hat{x}_{in}{}' + \sin\theta_2 \hat{y}_{in}{}' \end{cases}$$

5. Выразим отсюда значения растянутых квадратур и подставим это в выражения для операторов квадратур второго (неизмеренного) узла:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_2{}' \\ \hat{Y}_2{}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_-} \begin{pmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_+ + \cos\theta_- & \sin\theta_+ \\ -\sin\theta_+ & \cos\theta_+ - \cos\theta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix}$$

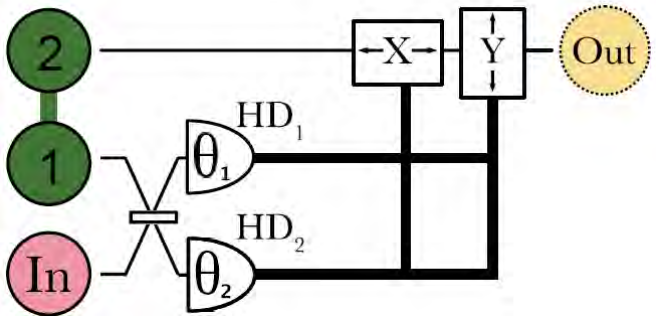
$$+\sqrt{1+g^2} \begin{pmatrix} 1/g\hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta_-} \begin{pmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \end{pmatrix}$$



$$\theta_\pm = \theta_1 \pm \theta_2$$

6. Заменяем операторы фототоков полученными значениями $\hat{i}_1 \to i_1$ $\hat{i}_2 \to i_2$

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Произвольная одномодовая гауссова операция

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_2' \\ \hat{Y}_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_-} \begin{pmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_+ + \cos\theta_- & \sin\theta_+ \\ -\sin\theta_+ & \cos\theta_+ - \cos\theta_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix}$$

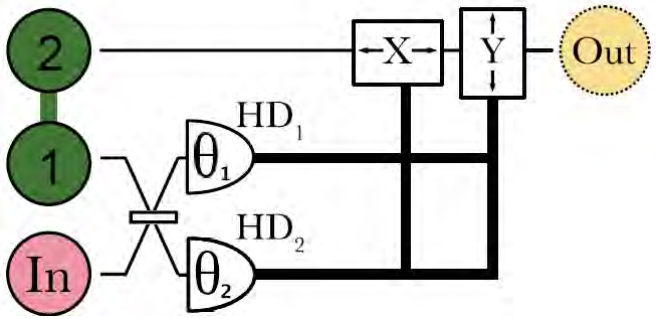
$$+\sqrt{1+g^2} \begin{pmatrix} 1/g\hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \frac{\sqrt{2}}{\sin\theta_-} \begin{pmatrix} 1/g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \cos\theta_1 \\ -\sin\theta_2 & -\sin\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

7. Выполняем смещения квадратур выходного состояния по результатам измерений:

$$\hat{X}\left(\sqrt{2}\frac{\cos\theta_2 i_1 + \cos\theta_1 i_2}{g\sin\theta_-}\right) \qquad \hat{Z}\left(\sqrt{2}g\frac{-\sin\theta_2 i_1 - \sin\theta_1 i_2}{\sin\theta_-}\right)$$

- полностью компенсируем третье слагаемое

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Произвольная одномодовая гауссова операция

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_{out}\\ \hat{Y}_{out}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_-}\begin{pmatrix}1/g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_+ + \cos\theta_- & \sin\theta_+\\ -\sin\theta_+ & \cos\theta_+ - \cos\theta_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_{in}\\ \hat{y}_{in}\end{pmatrix}$$

$$+\sqrt{1+g^2}\begin{pmatrix}1/g\hat{y}_{s,1}\\ \hat{y}_{s,2}\end{pmatrix}$$

Первое слагаемое можно разложить на произведение матриц поворота и сжатия:

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_{out}\\ \hat{Y}_{out}\end{pmatrix} = S\left[\ln g\right] R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_-}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right)\begin{pmatrix}\hat{x}_{in}\\ \hat{y}_{in}\end{pmatrix} \quad +\sqrt{1+g^2}\begin{pmatrix}1/g\hat{y}_{s,1}\\ \hat{y}_{s,2}\end{pmatrix}$$

Вспоминаем теорему Блоха-Мессиа о разложении:

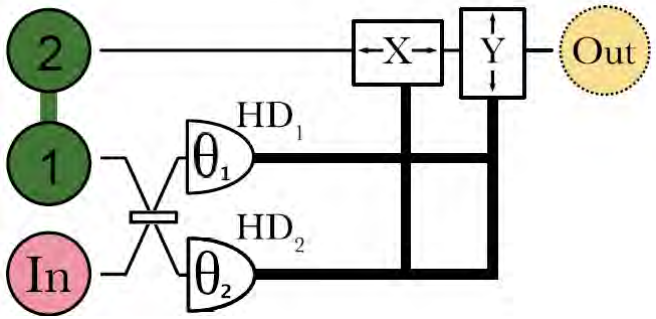
$$U = R\left(\varphi_1\right) S\left[r\right] R\left(\varphi_2\right)$$

- универсальное одномодовое гауссово преобразование можно разложить на произведение трех матриц – поворота, сжатия и другого поворота

$$U_1 = R\left(\underline{-\frac{1}{2}\theta_+}\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_-}{2}\right]\right) R\left(\underline{-\frac{1}{2}\theta_+}\right)$$

- у нас очень похоже, но не то

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Произвольная одномодовая гауссова операция

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_{out}\\ \hat{Y}_{out}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\theta_-}\begin{pmatrix}1/g & 0\\ 0 & g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_+ + \cos\theta_- & \sin\theta_+\\ -\sin\theta_+ & \cos\theta_+ - \cos\theta_-\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat{x}_{in}\\ \hat{y}_{in}\end{pmatrix} + \sqrt{1+g^2}\begin{pmatrix}1/g\hat{y}_{s,1}\\ \hat{y}_{s,2}\end{pmatrix}$$

Первое слагаемое можно разложить на произведение матриц поворота и сжатия:

$$\begin{pmatrix}\hat{X}_{out}\\ \hat{Y}_{out}\end{pmatrix} = S\left[\ln g\right] R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_-}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right)\begin{pmatrix}\hat{x}_{in}\\ \hat{y}_{in}\end{pmatrix} + \sqrt{1+g^2}\begin{pmatrix}1/g\hat{y}_{s,1}\\ \hat{y}_{s,2}\end{pmatrix}$$

Вспоминаем теорему Блоха-Мессиа о разложении:

$$U = R(\varphi_1)\, S[r]\, R(\varphi_2)$$

- универсальное одномодовое гауссово преобразование можно разложить на произведение трех матриц – поворота, сжатия и другого поворота

Преобразования на двухмодовом кластере недостаточно!

$$U_1 = R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_-}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_+\right)$$

- у нас очень похоже, но не то

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Произвольная одномодовая гауссова операция

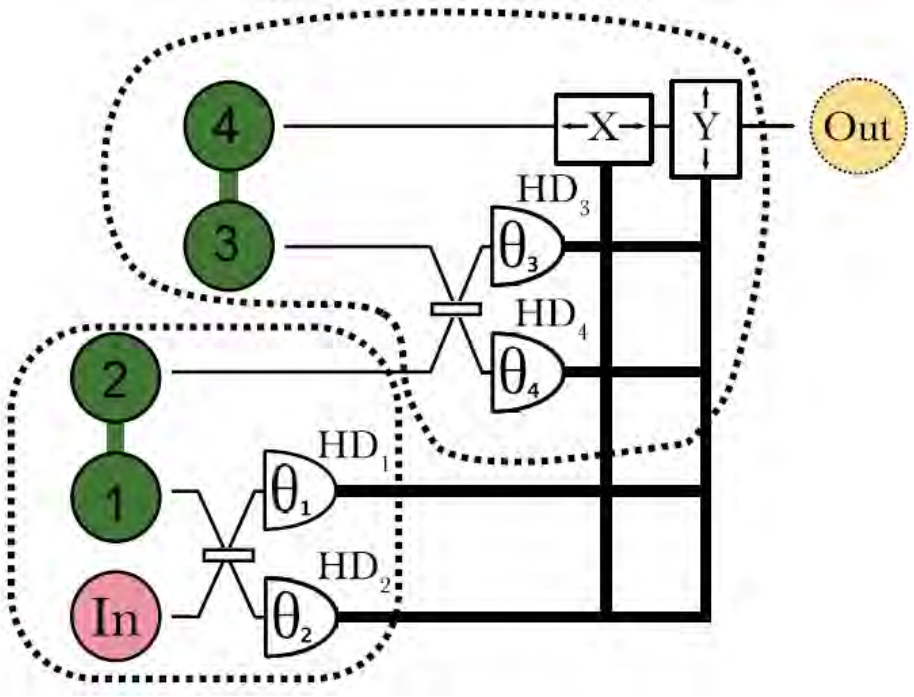
Преобразование на двух двухмодовых кластерах:

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out}' \\ \hat{Y}_{out}' \end{pmatrix} = \tilde{U} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in} \\ \hat{y}_{in} \end{pmatrix} + U_2 \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,1} \\ \hat{y}_{s,2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{y}_{s,3} \\ \hat{y}_{s,4} \end{pmatrix}$$

где $$\tilde{U} = U_2 U_1 = R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2}\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_{-2}}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+2}\right) \cdot R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+1}\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_{-1}}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+1}\right)$$

Положим $\theta_{-2} = \pi/2$

$$\tilde{U} = U_2 U_1 = R\left(-\theta_{+2} - \frac{1}{2}\theta_{+1}\right) S\left(\ln\left[\tan\frac{\theta_{-1}}{2}\right]\right) R\left(-\frac{1}{2}\theta_{+1}\right)$$

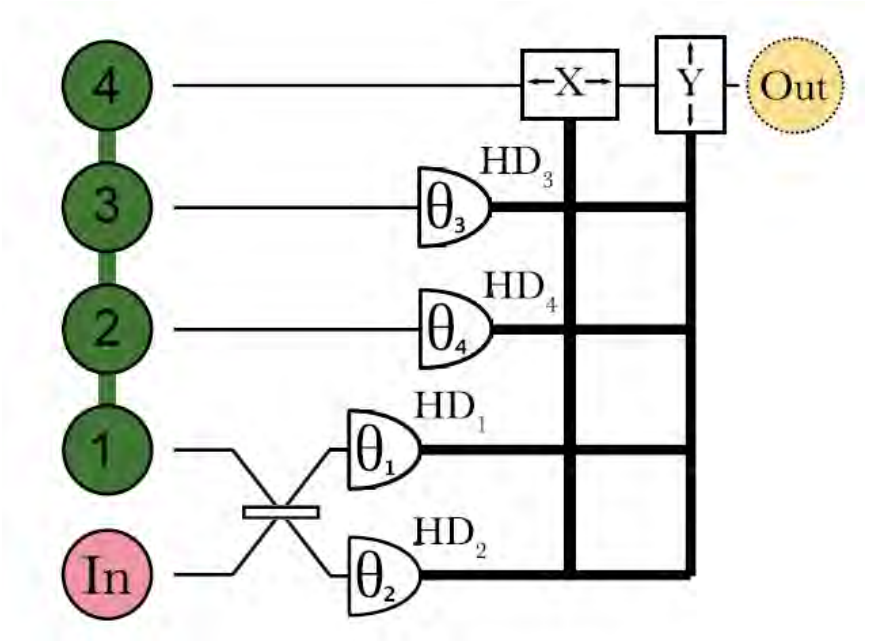


- получили универсальное одномодовое гауссово преобразование

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Произвольная одномодовая гауссова операция

Преобразование на четырехмодовом кластере:



- можем выполнить то же преобразование, но хуже

Note: Пока мы рассматривали идеально сжатые состояния, нам было не важно, какую конфигурацию кластера использовать, как его получать. Все варианты приводили к одному и тому же результату в вычислениях. Но идеальных состояний нет, и когда мы начинаем заменять их реальными, оказывается, что от вида кластера зависит ошибка вычислений.

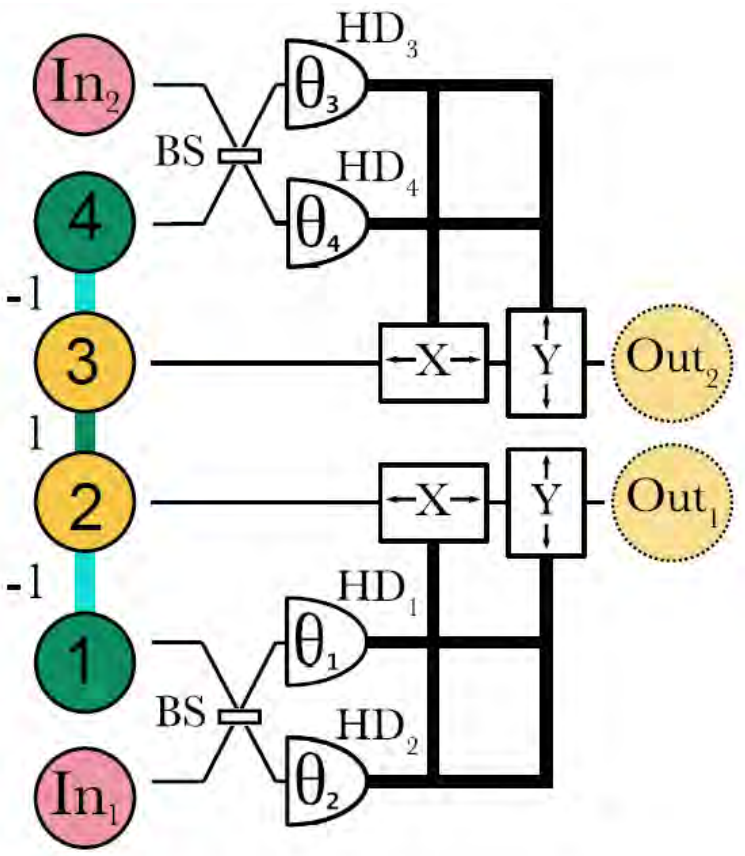
НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Двухмодовая операция CZ

1. Генерируем четырехмодовый кластер
2. Примешиваем к двум крайним узлам два входных состояния
3. Производим локальные измерения в каналах In1, 1, 4, In2.
4. Производим сдвиги квадратур двух оставшихся осцилляторов по результатам измерений – получаем выходное состояние

$$\begin{pmatrix} \hat{X}_{out,1} \\ \hat{X}_{out,2} \\ \hat{Y}_{out,1} \\ \hat{Y}_{out,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{in,1} \\ \hat{x}_{in,2} \\ \hat{y}_{in,1} \\ \hat{y}_{in,2} \end{pmatrix}$$

$$+ \hat{\overrightarrow{Er}}'(\hat{y}_{s,1}, \hat{y}_{s,2}, \hat{y}_{s,3}, \hat{y}_{s,4})$$



$$\theta_3 = \theta_2 = -\theta_1 = -\theta_4 = \frac{\pi}{2}$$

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Негауссова операция: преобразование кубической фазы

$\hat{H}_1 = \gamma \hat{x}^3$ - гамильтониан преобразования кубической фазы

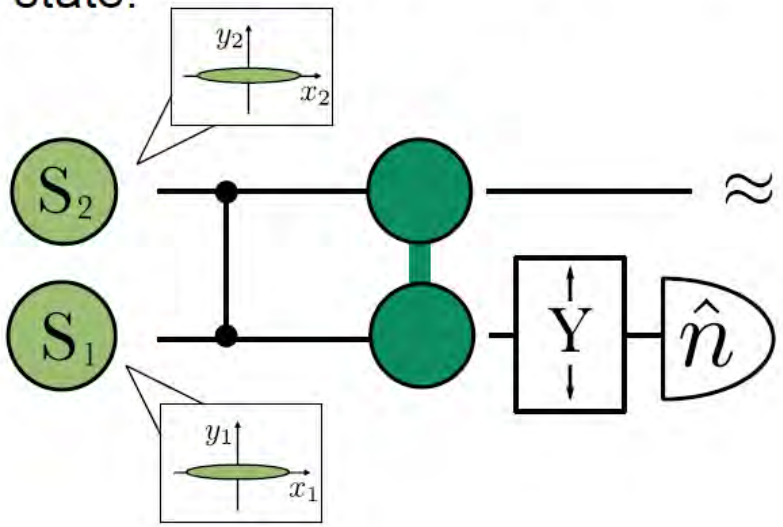
$\hat{x}_{out} = \hat{x}_{in}$ $\hat{y}_{out} = \hat{y}_{in} - \frac{3}{2}\gamma \hat{x}_{in}^2$ - эволюция квадратур гамильтонианом

- параметрические процессы – нелинейные преобразования квадратур
- малый коэффициент нелинейности, $\gamma \ll 1$ - нужны другие схемы

НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Негауссова операция: преобразование кубической фазы

Scheme for generating a cubic phase state using the two-node cluster state:

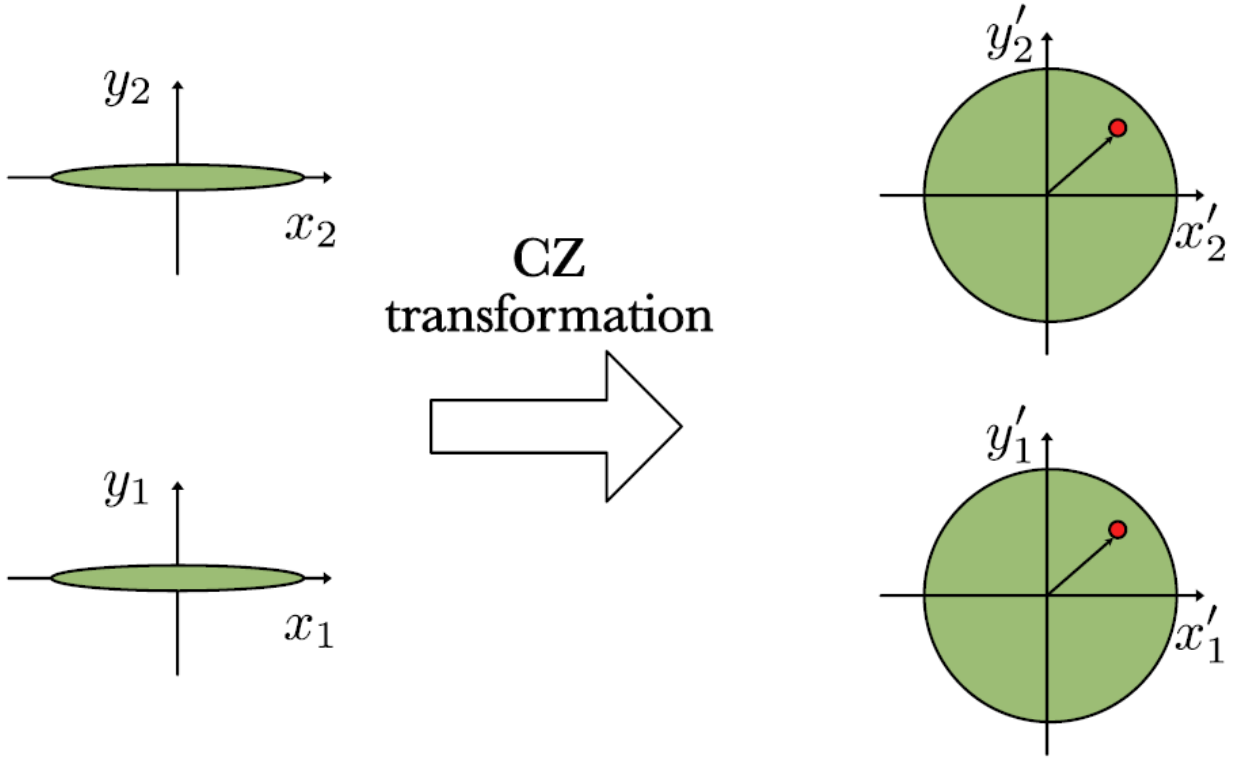


$$\approx e^{i\gamma(n)\hat{q}^3}|0\rangle_y$$

$$\gamma(n) = \left(6\sqrt{2n+1}\right)^{-1}$$

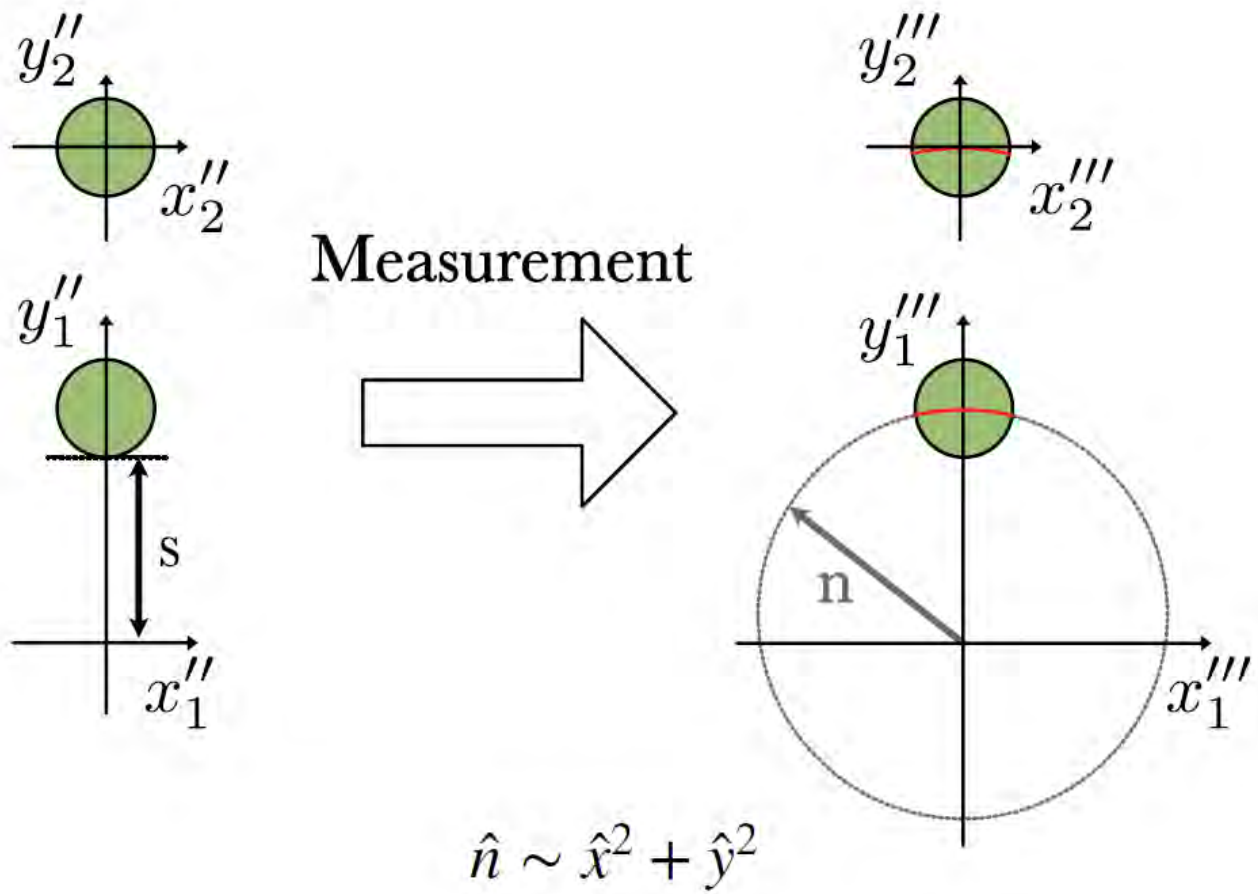
НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Негауссова операция: преобразование кубической фазы



НАБОР ОПЕРАЦИЙ, НЕОБХОДИМЫЙ ДЛЯ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Негауссова операция: преобразование кубической фазы



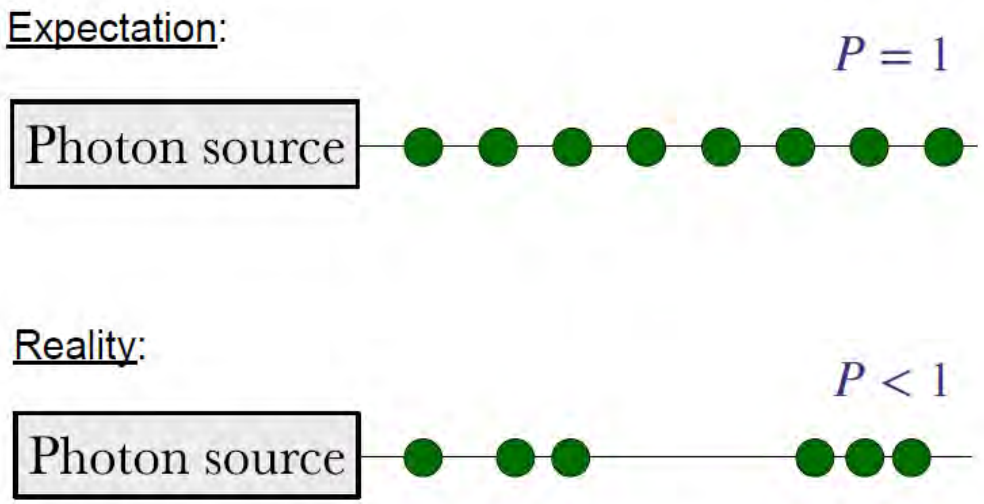
ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

Какой из путей легче?

Дискретные переменные

Платформы для реализации кубитов:
- захваченные ионы
- ридберговские атомы
- сверхпроводниковые кубиты
- фотонные системы

Вероятностная природа однофотонной генерации:



Достоинства:
- «дешевый» источник
- высокая скорость передачи
- легко манипулировать – легко организовать однокубитные преобразования
- легко измерять – хорошо подходят для локальных измерений
- слабо подвержены декогеренции

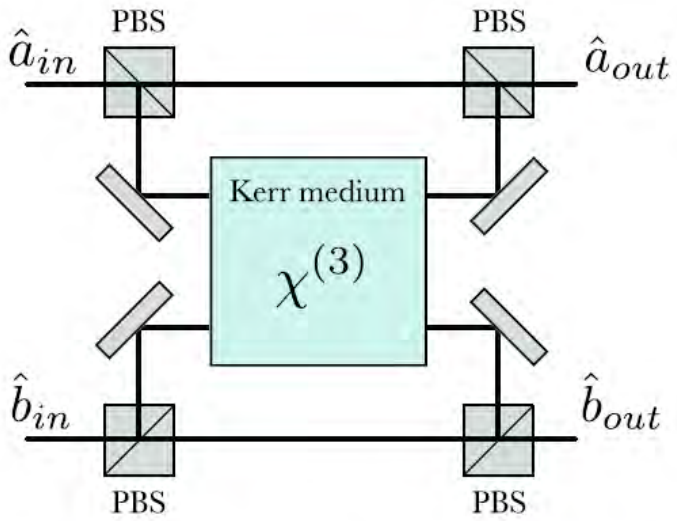
Недостатки:
- вероятностный характер генерации
- трудно организовать взаимодействие

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

Дискретные переменные: взаимодействие фотонов

Взаимодействие через посредника – нелинейную среду

$$\hat{H}_{kerr} = \kappa \hat{n}_a \hat{n}_b$$



$$|0\rangle_a|0\rangle_b \to |0\rangle_a|0\rangle_b$$

$$|1\rangle_a|0\rangle_b \to |1\rangle_a|0\rangle_b$$

$$|0\rangle_a|1\rangle_b \to |0\rangle_a|1\rangle_b$$

$$|1\rangle_a|1\rangle_b \to e^{i\kappa t}|1\rangle_a|1\rangle_b$$

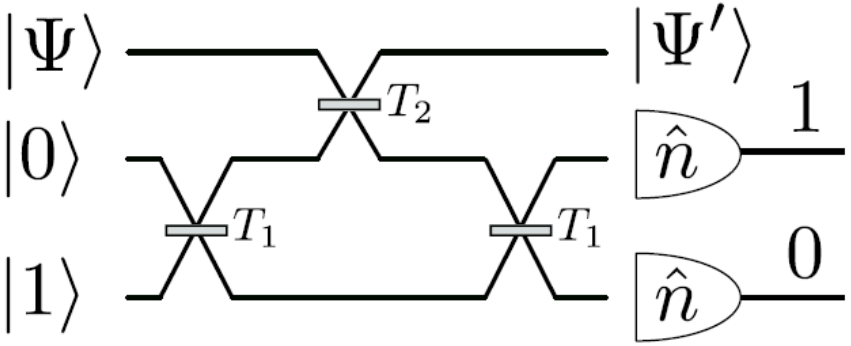
If $\kappa t = \pi$, then we have the cPhase transformation

In reality, $\kappa t \approx 10^{-18} \ll \pi$

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

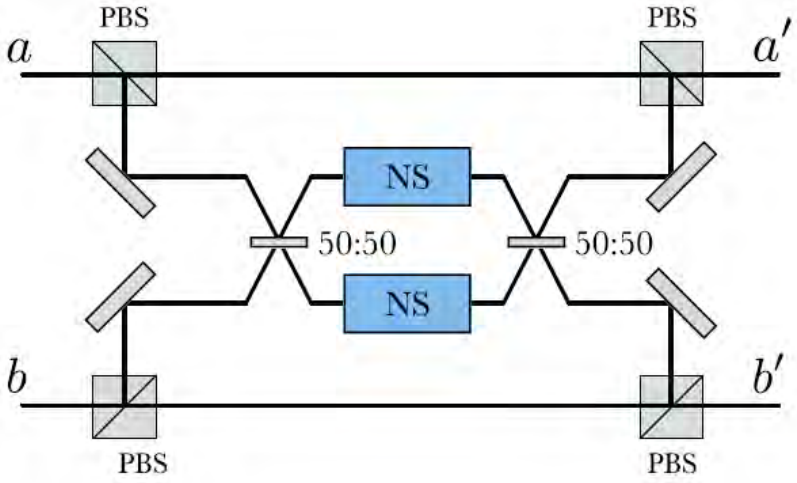
Дискретные переменные: взаимодействие фотонов

Вероятностное выполнение операции CZ - операция нелинейного знака



$$\hat{\text{NS}} : |\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle \rightarrow a|0\rangle + b|1\rangle - c|2\rangle$$

Probability: $P_{NS} = 1/4$



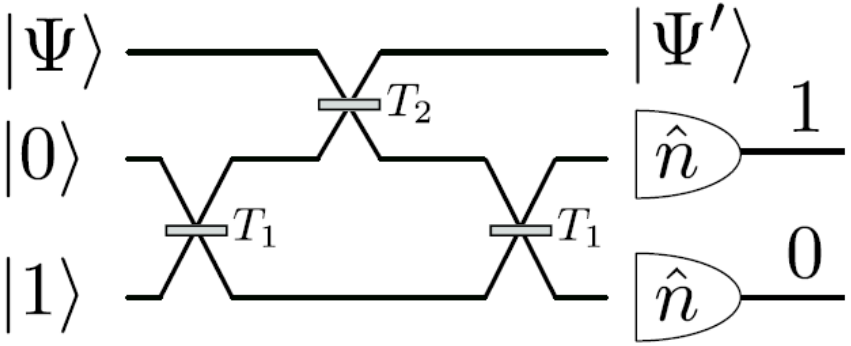
$$\hat{a}_H\hat{b}_H \rightarrow \hat{a}'_H\hat{b}'_H$$
$$\hat{a}_H\hat{b}_V \rightarrow \hat{a}'_H\hat{b}'_V$$
$$\hat{a}_V\hat{b}_H \rightarrow \hat{a}'_V\hat{b}'_H$$
$$\hat{a}_V\hat{b}_V \rightarrow -\hat{a}'_V\hat{b}'_V$$

$$P_{CZ} = P_{NS}^2$$

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

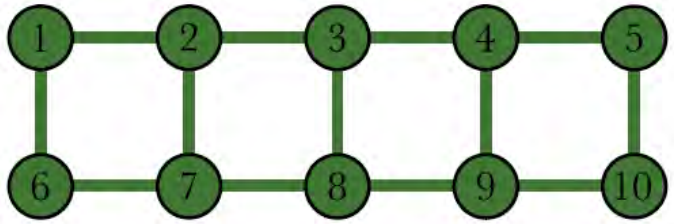
Дискретные переменные: взаимодействие фотонов

Вероятностное выполнение операции CZ - операция нелинейного знака



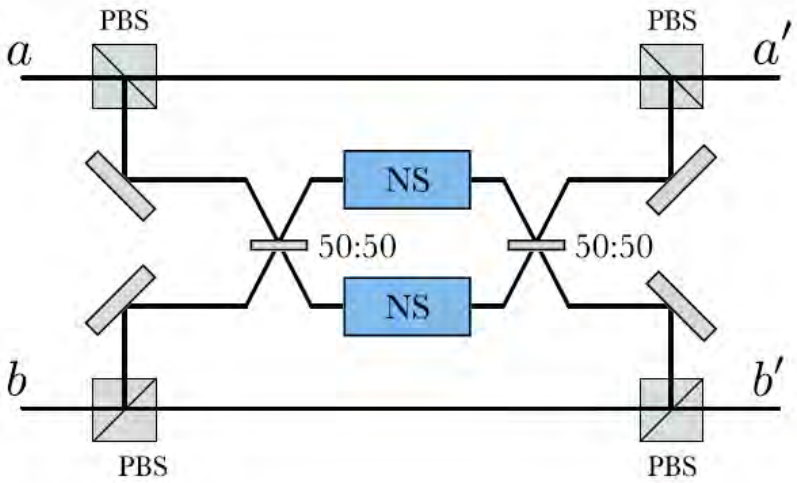
$$\hat{\text{NS}} : |\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle \rightarrow a|0\rangle + b|1\rangle - c|2\rangle$$

Probability: $P_{NS} = 1/4$



$n = 10, N = 13$

$P_{cl,10} = P_{NS}^{26}$



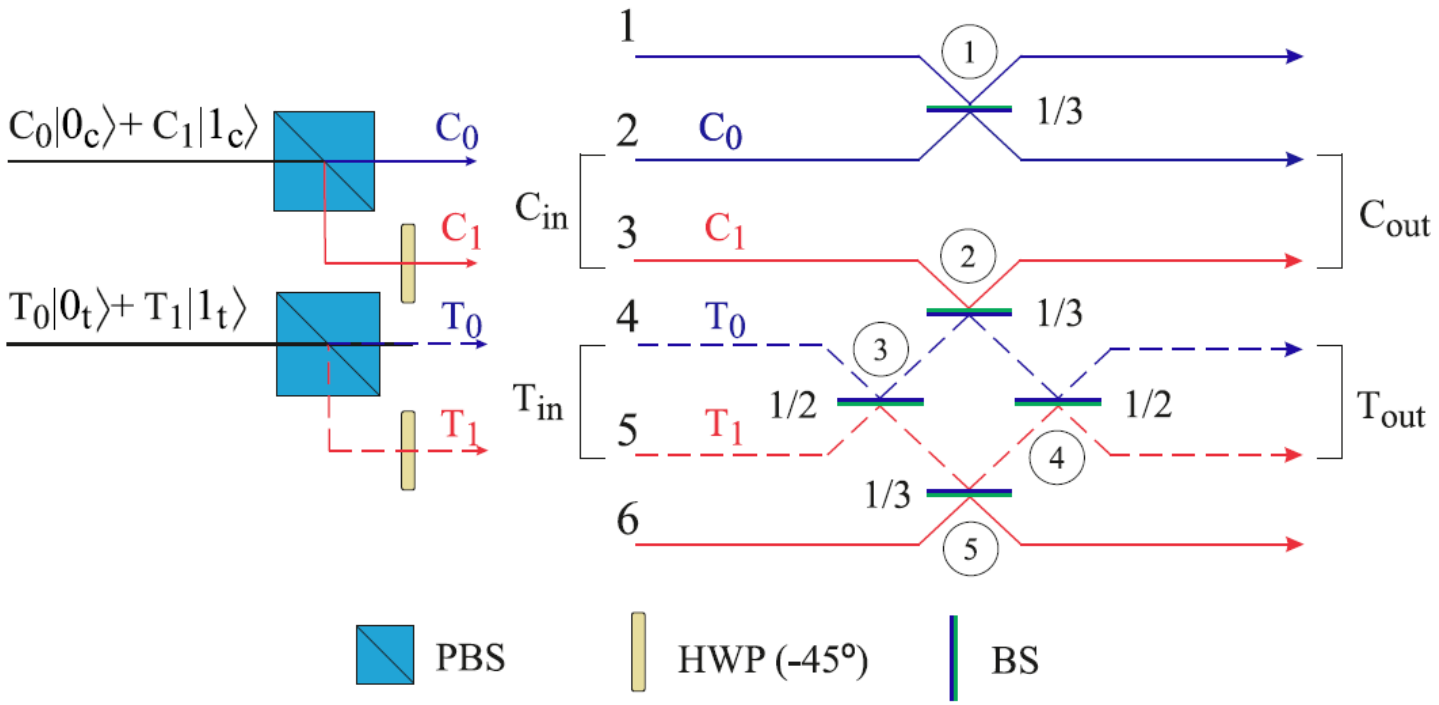
$$\hat{a}_H\hat{b}_H \rightarrow \hat{a}'_H\hat{b}'_H$$
$$\hat{a}_H\hat{b}_V \rightarrow \hat{a}'_H\hat{b}'_V$$
$$\hat{a}_V\hat{b}_H \rightarrow \hat{a}'_V\hat{b}'_H$$
$$\hat{a}_V\hat{b}_V \rightarrow -\hat{a}'_V\hat{b}'_V$$

$P_{CZ} = P_{NS}^2$

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

Дискретные переменные: взаимодействие фотонов

Вероятностное выполнение операции CNOT - увеличиваем вероятность, сохраняя принцип



$$P_{CNOT} = 1/9$$

ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

Непрерывные переменные

Достоинства:

- генерация кластера и сами вычисления детерминированы!

Сложности:

- Результат вычислений зависит от конфигурации кластера, ошибка вычислений накапливается с ростом числа операций, коды коррекции ошибок работают только для хорошо сжатых осцилляторов (-18 – -20 дБ). Уровень сжатия, экспериментально достижимый на сегодня: -15.5 дБ

  - ✓ Существуют коды коррекции ошибок с меньшими требованиями на уровень сжатия (-10.8 дБ)
  - ✓ Оптимизация конфигурации кластера по весовым коэффициентам
  - ✓ Использование негауссовых операций для снижения ошибки вычислений

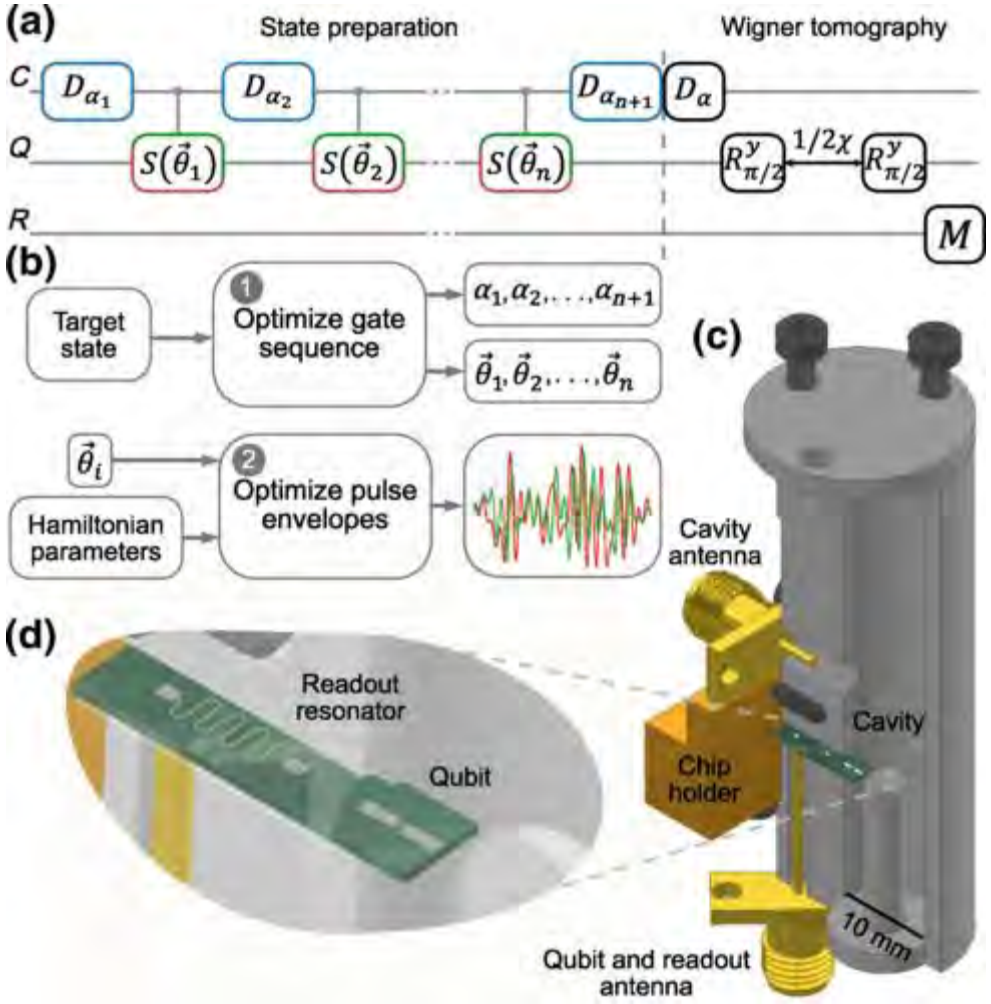
- Экспериментальная реализация негауссовых операций

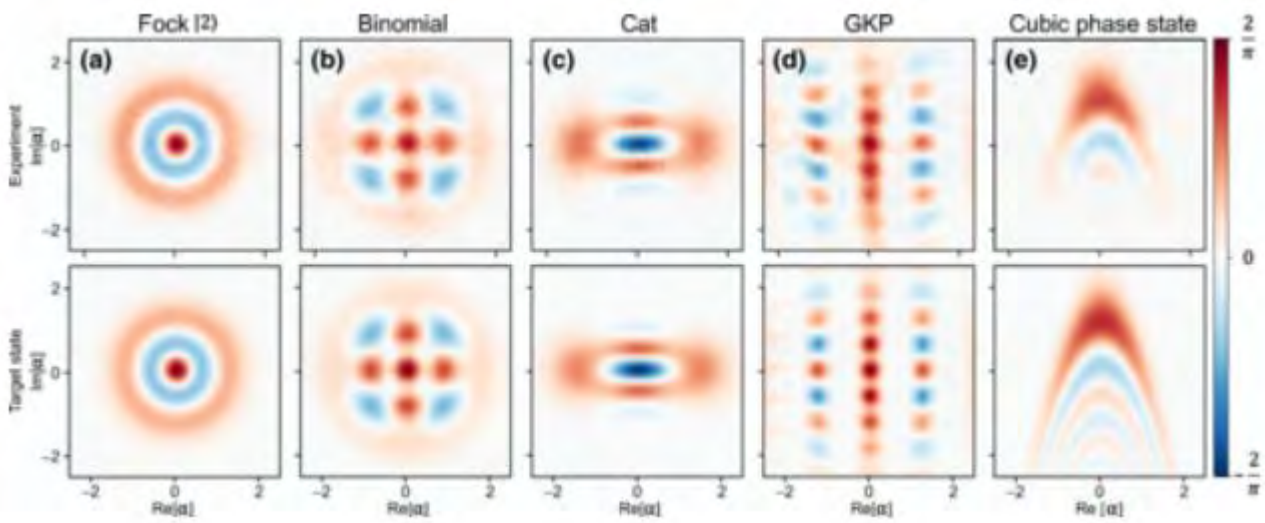
ФИЗИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ, НА КОТОРЫХ РЕАЛИЗУЮТ ВЫЧИСЛЕНИЯ, СЛОЖНОСТИ. СОВРЕМЕННЫЙ ПРОГРЕСС

M. Kudra, M. Kervinen, I. Strandberg, S. Ahmed, M. et al, PRX Quantum 3, 030301 (2022).

Непрерывные переменные

Экспериментальная реализация негауссовых операций

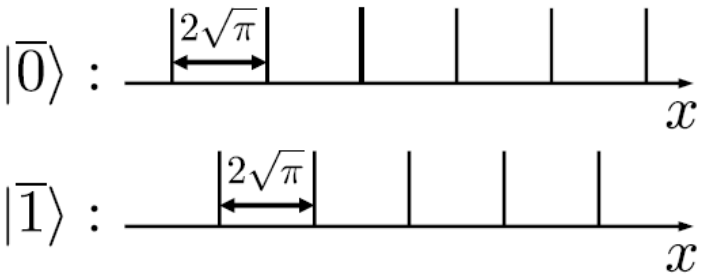




КОРРЕКЦИЯ ОШИБОК ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ В НЕПРЕРЫВНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Идеальные GKP-состояния

Gottesman-Kitaev-Preskill



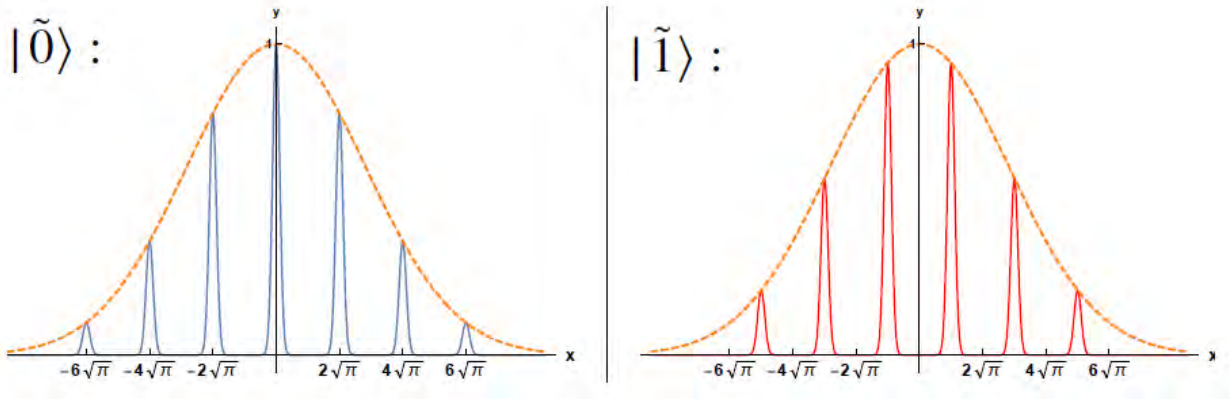
$$|\bar{0}\rangle = \sum_{n\in Z} |2n\sqrt{\pi}\rangle_x,$$

$$|\bar{1}\rangle = \sum_{n\in Z} |(2n+1)\sqrt{\pi}\rangle_x$$

$$x \to \hat{D}_x^\dagger(u) x \hat{D}_x^\dagger(u) = x + u$$

$$\hat{D}_x(u) = e^{-iu\hat{y}}$$

Реальные GKP-состояния



M. Kudra, M. Kervinen, I. Strandberg, S. Ahmed, M. et al, PRX Quantum 3, 030301 (2022).